



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

ESTUDIO DEL ENTRELAZAMIENTO EN SISTEMAS CUÁNTICOS PENTAPARTITA EN MARCOS DE REFERENCIA NO INERCIALES

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

PRESENTA

MTRO. JUAN LUIS MANRÍQUEZ ZEPEDA

DIRECTOR

DR. JUVENAL RUEDA PAZ

CO-DIRECTOR

DR. SHI-HAI DONG

TUTOR

DR. MANUEL ÁVILA AOKI

VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO 13 de marzo de 2023.



CUVCH

Resumen

Se estudian los estados cuánticos pentapartita GHZ y W-Class en un marco de referencia no inercial. Se exploran sus propiedades calculando las negatividades de los enredos de las biparticiones $1 - 4$, $2 - 3$ y $1 - 1$, también las medidas de entrelazamiento residual total geométrico y aritmético π_5 y Π_5 , y además la entropía de von Neumann. Se ilustra gráficamente las diferencias existentes entre estos tipos de estados. Se encuentra que todos los enredos antes mencionados, así como las medidas de entrelazamiento total residual son dependientes del observador, que las funciones que las describen decrecen más rápidamente entre más aumenta el número de cúbits no inerciales. Pero, se observa que aún en aceleración infinita existirá una pequeña cantidad de entrelazamiento. Se finaliza con la comparación del comportamiento de la entropía en los diferentes estados estudiados y se nota que aumenta la inestabilidad de los sistemas en un marco de referencia no inercial con respecto a sistemas de 3 y 4 cúbits entrelazados. En general se aprecia una mayor robustez del entrelazamiento en estados GHZ que en los W-class, pero una mayor cantidad por parte de los sistemas cuánticos GHZ.

Posterior a esta primera aproximación al problema de la degradación del entrelazamiento en un marco de referencia no inercial, se estudió el comportamiento de estados GHZ con $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados. Para esto, fue analizada la forma de los estados GHZ y de sus respectivas matrices de densidad y se encontró que en el marco de la aproximación de modo único los exponentes de los términos exponenciales siguen con regularidad un patrón. Esto permitió generalizar algunos de los resultados en las medidas de entrelazamiento de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial. De tal modo que, se confirma que estas medidas son dependientes del número de cúbits no inerciales, así como de un parámetro $r \in [0, \pi/4]$ asociado con la aceleración $a \in [0, \infty]$. Las negatividades $N_{1-(n-1)}$ cumplen con ser siempre iguales para un número de cúbits no inerciales q fijo, siempre que exista al menos un cúbit inercial entre los $(n - 1)$ modos (cúbits) no inerciales. El entrelazamiento residual total se puede aumentar hasta la cantidad $\cos^{2q}(r)$, aumentando el número de cúbits inerciales ($n \rightarrow \infty$), para un número fijo q de observadores no inerciales. Haciendo uso de este último resultado se infirió que el

máximo entrelazamiento usando estados GHZ que se puede lograr aumentando el número de cúbits inerciales que den soporte a los no inerciales es menor al 10 % con $q = 4$ y menor al 1 % para $q \geq 7$. Con esto se advierte sobre las precauciones que se deberán tener en consideración en la implementación de las tecnologías cuánticas que dependan del entrelazamiento como recurso primario. Por último, en el contexto del estudio de los sistemas GHZ n -partita, también se logro deducir una expresión para calcular la entropía de estado GHZ en un marco de referencia no inercial de n cúbits entrelazados con q observadores no inerciales, bajo la condición de que uno de sus cúbits se inercial ($q \leq n$).

Abstract

The GHZ and W-Class pentapartite quantum states in a non-inertial frame are studied. Their properties are explored by calculating the negativities of the bipartitions $1 - 4$, $2 - 3$ and $1 - 1$, also the whole residual entanglement measures geometric and arithmetic π_5 and Π_5 , and also the von Neumann entropy. It is illustrated graphically the differences between these types of states. It is found that all the aforementioned entanglements, as well as the measures of whole residual total entanglement are dependent on the observer, that the functions that describe them decrease faster as the number of non-inertial observers increases. But, it is observed that even in infinite acceleration there will be a small amount of entanglement. It ends with the comparison of the behavior of entropy in the different states studied and it is noted that the systems are more unstable in regard with cases with 3 and 4 entangled qubits. In general, a greater robustness of entanglement is observed in GHZ states than in W-class states, but a greater amount on the part of GHZ quantum systems.

After this first approximation to the problem of the degradation of the entanglement in a non-inertial reference frame, it is studied the behavior of GHZ states with $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ entangled qubits. The form of the GHZ states and their respective density matrices was analyzed and it was found that within the framework of the single mode approximation the exponents of exponential terms follow a pattern. This allowed to generalize some of the results in the measures of entanglement of GHZ states in a non-inertial frame. In this way, it is confirmed that these measures are dependent on the number of non-inertial qubits, as well as on a parameter $r \in [0, \pi/4]$ associated with the acceleration $a \in [0, \infty]$. The negativities $N_{1-(n-1)}$ fulfill with being the same in GHZ states with equal number of non-inertial qubits q , as long as, there is at least one inertial qubit among the $(n - 1)$ modes (qubits) no inertial. The whole residual entanglement can be increased up to the quantity $\cos^{2q}(r)$, by increasing the number of inertial qubits ($n \rightarrow \infty$), for a fixed number q of non-inertial observers. Using this last result, it was inferred that the maximum entanglement using GHZ states which can be achieved by increasing the number of inertial qubits that support non-inertials is less than 10% with $q = 4$ and less than 1%

for $q \geq 7$. This indicates the precautions that must be taken into consideration in the implementation of quantum technologies that depend of entanglement as a main resource. Lastly, in the context of study of the GHZ n -partite systems, it was also possible to deduce an expression to calculate the GHZ state entropy in a non-inertial reference frame of n qubits entangled with q non-inertial observers, under the condition that one of its qubits must be inertial, i.e. ($q \leq n$).

Índice general

1. Introducción general	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Justificación	2
1.3. Pregunta de investigación	2
1.4. Hipótesis	2
1.5. Objetivos	3
1.6. Contextos y delimitación	3
2. Marco teórico	5
2.1. Mecánica cuántica	5
2.1.1. Las propiedades cuánticas de la materia	5
2.1.2. Sistemas cuánticos	8
2.1.3. Eigenvalores y eigenvectores	11
2.1.4. El vector de estado	12
2.1.5. La matriz de densidad	13
2.1.6. Entrelazamiento	15
2.2. Medidas de entrelazamiento	17
2.2.1. Negatividad	18
2.2.2. Entrelazamiento residual total	19
2.2.3. Entropía	20
2.2.4. Entropía en teoría de la información	21
2.3. Relatividad	26
2.3.1. Marcos de referencia no inerciales	26

2.3.2.	Transformaciones de Lorentz	27
2.3.3.	Línea de mundo de un observador acelerado	32
2.3.4.	Coordenadas de Rindler	39
2.4.	Teoría de Campos	43
2.4.1.	Espinores	51
2.4.2.	Efecto Unruh	54
2.4.3.	Aproximación de modo único	59
3.	Desarrollo y metodología	62
3.1.	Descripción de los experimentos de entrelazamiento en sistemas pentapartita en un marco de referencia no inercial	63
3.1.1.	Matrices de densidad de los sistemas pentapartita no inerciales	65
3.1.2.	Estados accesibles de un sistema pentapartita	77
3.2.	Medidas de Entrelazamiento Multipartita	84
3.2.1.	Negatividad	84
3.2.2.	Expresiones analíticas de los enredos 1-4 en sistemas pentapartita GHZ	84
3.2.3.	Expresiones analíticas de los enredos 1-4 en sistemas pentapartita W-class	85
3.2.4.	Análisis de los enredos 1-4 de sistemas pentapartita en marcos de referencia no inercial	87
3.2.5.	Negatividad de los enredos 2-3	93
3.3.	Medidas de entrelazamiento residual total	97
3.3.1.	Expresiones analíticas del entrelazamiento residual total π_5 y Π_5 en sistemas GHZ	97
3.3.2.	Expresiones analíticas del entrelazamiento residual total π_5 y enredo- Π_5 en sistemas W-class	100
3.4.	Entropía	106
3.4.1.	Eigenvalores no nulos de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita GHZ	108

3.4.2.	expresiones analíticas de la entropía	109
3.4.3.	Eigenvalores no nulos de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita W-class	111
3.5.	Medidas de entrelazamiento para estados GHZ n-partita en un marco de referencia no inercial	115
3.5.1.	Forma de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial .	116
3.5.2.	Negatividad de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial	119
3.5.3.	Entrelazamiento residual total en estados GHZ n-partita	122
3.5.4.	Entropía de los estados GHZ n-partita en un marco de referencia no inercial	126
4.	Resultados, Discusión y Conclusiones	131
A.	Apéndices	135
A.1.	Toolbox para las operaciones básicas en cómputo cuántico	135
A.2.	C O N S T A N C I A S	144

Índice de figuras

2.1. Esquema de la máquina \mathcal{M} . Las flechas representan la dirección que las canicas seguirán si se abren unas compuertas que estas tienen. Imagen adaptada del ejemplo 3.1.1 en la Ref.(Yanofsky and Manucci, 2008).	8
2.2. Esquema de la máquina \mathcal{M} donde se han llenado estas cajas con 27 canicas. Imagen adaptada del ejemplo 3.1.1 en la Ref. (Yanofsky and Manucci, 2008).	9
2.3. Esquema de la maquina \mathcal{M} donde se muestra el estado de \mathcal{M} luego de que se ha permitido el paso de las canicas a través de las tuberías.	9
2.4. Esquema del experimento del Stern-Gerlach. Imagen adaptada de la sección 14 del blog de Armando Martínez: la-mecanica-cuantica.blogspot.com . . .	11
2.5. Representación pictórica de la superposición de los estados cuánticos del sistema “intercambio de regalos” $ \alpha ^2$, $ \beta ^2$ y $ \gamma ^2$ son las probabilidades de obtener cierto regalo.	13
2.6. Espectro proyectado sobre una pantalla en el experimento Stern-Gerlach. a) imagen que muestra la dispersión cuando ningún campo electromagnético está presente. b) imagen que muestra el efecto de activar un campo electromagnético no homogéneo sobre el haz de electrones. Se puede ver que las poblaciones de electrones son simétricas en el eje vertical. Imagen obtenida de la sección 14 del blog de Armando Martínez: la-mecanica-cuantica.blogspot.com	15
2.7. Ejes color negro. Descripción gráfica de nuestro marco de referencia (<i>LABFRAME</i>). Ejes color rojo. Descripción gráfica del marco de referencia de un observador con velocidad $0.33c$	28

2.8. Ilustración de la medición de la velocidad de la luz por parte de dos observadores inerciales cada uno en su marco de referencia. Las líneas en gris son las mediciones correspondientes en el *LABFRAME*. Las líneas verdes corresponden al marco de referencia con velocidad relativa diferente a la nuestra. 29

2.9. Ilustración de un vector verde en el espacio de Minkowski. 30

2.10. Línea de mundo de un observador acelerado en un espacio-tiempo de Minkowski. 33

2.11. Ilustración de un cuadrivector velocidad. Este es tangente a la línea de mundo de un observador acelerado. 34

2.12. Ilustración de los cuadrivectores aceleración y velocidad en el espacio-tiempo. En el marco de referencia de un observador comóvil con velocidad constante estos vectores son ortogonales. 36

2.13. Gráfica de la ecuación (2.66). En la gráfica se han hecho $a = c = 1$ y $x_0 = 5$. . . 39

2.14. Ilustración del eje x' de un observador comóvil tangente a un observador acelerado. Notar que haciendo $x_0 = \frac{c^2}{a}$ el eje x cruza nuestro origen de coordenadas. . . . 40

2.15. Líneas de tiempo de un marco de referencia no inercial. Se han dibujado dos asíntotas a las curvas ct' para indicar que es imposible que un rayo de luz desde la región II pueda en algún momento en el futuro tocar algún evento de la región III. 43

2.16. Ilustración de un conjunto de resortes que ejemplifican el prototipo de un campo en un medio mecánico. 44

2.17. Ilustración que facilita el notar que la densidad de masa de este prototipo es de $\rho = \frac{m}{a}$ 45

3.1. (a) El enredo 1-4 desde el punto de vista de cada observador en el estado GHZ cuando uno de estos es acelerado. (b) El enredo 1-4 desde el punto de vista de cada observador en el estado W-class cuando uno de estos es acelerador. 88

3.2. (a) Enredo 1-4 desde el punto de vista de los observadores inerciales en un sistema GHZ. (b) Enredo 1-4 visto por observadores no inerciales en un sistema GHZ. 89

3.3. (a) Enredos 1-4 de cada uno de los observadores en un sistema pentapartita GHZ con 3 cúbits no inerciales. (b) Enredos 1-4 como función del parámetro r en sistema pentapartita W-class donde 3 cúbits son no inerciales.	89
3.4. (a) Enredos 1-4 de un sistema GHZ con 4 cúbits acelerados (b) Enredos 1-4 de un sistema W-class con 4 cúbits acelerados.	90
3.5. (a) Enredos 1-4 en sistemas GHZ cuando todos los observadores son no inerciales. (b) Enredos 1-4 en sistemas W-class cuando todos los observadores son no inerciales.	91
3.6. (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit A en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit A en un sistema pentapartita W-class.	91
3.7. (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit C en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit C en un sistema pentapartita W-class.	92
3.8. (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit E en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit E en un sistema pentapartita W-class.	92
3.9. (a) Enlace 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con 1 observador no inercial. (b) Enlace 2-3 de sistemas pentapartita W-class con 1 observador no inercial.	93
3.10. (a) Enredo 2-3 en sistemas pentapartita GHZ. Se indica en la figura las diferentes configuraciones de pares de cúbits que se analizan. (a) Enredo 2-3 en sistemas pentapartita W-class. Se indica en la figura las diferentes configuraciones de pares de cúbits que se analizan.	94

3.11. (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ en marcos de referencia no inerciales cuando tres cúbits son acelerados. Se prueban varias configuraciones de los pares observadores, tal y como se indica en cada gráfica. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ en marcos de referencia no inerciales cuando tres cúbits son acelerados. Se prueban varias configuraciones de los pares observadores, tal y como se indica en cada gráfica. 95

3.12. (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con cuatro cúbits acelerados. Se muestran las funciones enredo 2-3 para varias configuraciones de pares observadores. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita W-class con cuatro cúbits acelerados. Se muestran las funciones enredo 2-3 para varias configuraciones de pares observadores. 96

3.13. (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con 5 cúbits acelerados. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita W-class con 5 cúbits acelerados. 96

3.14. (a) Comparación de las funciones de entrelazamiento de sistemas GHZ no inerciales conforme aumenta en número de cúbits acelerados. (b) Comparación de las funciones de entrelazamiento de sistemas W-class no inerciales conforme aumenta en número de cúbits acelerados. 97

3.15. (a) Entrelazamiento residual total π_5 en sistemas pentapartita GHZ. Cada gráfica es del estudio correspondiente a 1,2,3,4 y todos los observadores no-inerciales. (a) Entrelazamiento residual total Π_5 en sistemas pentapartita GHZ. Cada gráfica es del estudio correspondiente a 1,2,3,4 y todos los observadores no-inerciales. 105

3.16. (a) Entrelazamiento residual total Π_5 de los sistemas GHZ. Cada función corresponde a uno de los casos de estudio cuando 1,2,3,4 y todos los observadores son no inerciales. (b) Entrelazamiento residual total Π_5 de los sistemas W-class. Cada función corresponde a uno de los casos de estudio cuando 1,2,3,4 y todos los observadores son no inerciales. 106

3.17. (a) Comparación del entrelazamiento residual total π_4 y Π de sistemas pentapartita GHZ cuando hay 3 observadores no inerciales. (a) Comparación del entrelazamiento residual total π_4 y Π de sistemas pentapartita W-class cuando hay 3 observadores no inerciales. 106

3.18. (a) Entropía de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales. Cada gráfica de abajo hacia arriba representa cuando un observador es acelerado ($[\overset{1}{S}]$), dos observadores acelerados ($[\overset{2}{S}]$), tres observadores ($[\overset{3}{S}]$), cuatro ($[\overset{4}{S}]$) y todos los observadores siendo no inerciales ($[\overset{5}{S}]$). 115

3.19. Comparación de los enredos 1-($n - 1$) de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando un observadores es no inercial. 120

3.20. Comparación de los enredos 1-($n - 1$) de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando dos observadores son no inerciales 120

3.21. Comparación de los enredos 1-($n - 1$) de estados GHZ de cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando tres cúbits son no inerciales. 121

3.22. Comparación de el entrelazamiento residual total $[\pi_n]$ y $[\Pi_n]$ de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados cuando un observador es no inercial. Las linea discontinua roja corresponde al límite $\cos^2(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$. . . 123

3.23. Comparación del entrelazamiento residual total $[\pi_n]$ y $[\Pi_n]$ de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados dos observadores son no inerciales. La línea discontinua roja corresponde al límite $\cos^4(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$ 123

3.24. Comparación del entrelazamiento residual total $[\pi_n]$ y $[\Pi_n]$ de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados cuando tres observadores son no inerciales. La línea roja discontinua es el límite $\cos^6(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$. . . 124

3.25. Comparación del entrelazamiento residual total de estados GHZ totalmente no inerciales $[\frac{5}{\pi}]$ y $[\frac{8}{\pi}]$ contra sus cotas superiores $\cos^{10}(r)$ y $\cos^{16}(r)$ respectivamente. Se puede apreciar que en ambos casos, las gráficas azul y roja se vuelven mas próximas conforme aumenta el número q de observadores no inerciales. 125

3.26. Comparación de la aproximación $\cos^{2q}(r)$ de varios estados GHZ como función del número de observadores no inerciales en aceleración infinita ($r = \pi/4$). 126

3.27. Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando uno de estos es no inercial. 127

3.28. Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando dos de estos son no inerciales. 127

3.29. Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando tres son no inerciales. 128

Índice de tablas

2.1. Codificación de una fuente de información Información obtenida del ejemplo 1.1.2 en la Ref. (Cover and Thomas, 2006).	23
2.2. Codificación óptima del diccionario mostrado en la tabla 2.1	24
3.1. Entradas no nulas of ρ_{ABCDE_1}	78
3.2. Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales	79
3.3. Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales	80
3.4. Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales	81
3.5. Entrelazamiento residual total π_5 de sistemas pentapartita GHZ	104
3.6. Entrelazamiento residual total π_5 de sistemas pentapartita W-class	105
3.7. Eigenvalores de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales	108
3.8. Eigenvalores de las matrices de densidad de los sistemas W-class en marcos de referencia no inerciales	111

Capítulo 1

Introducción general

1.1. Planteamiento del problema

Hoy en día es más y más una realidad las tecnologías cuánticas, donde el entrelazamiento es el principal recurso para llevar a cabo las tareas de información cuántica de teleportación, cifrado cuántico y de códigos superdensos (Bennett et al., 1993; Bennett et al., 1997; Bouwmeester et al., 2011). Las aplicaciones en el procesamiento de la información cuántica involucran el uso de partículas, donde un marco de referencia no inercial induce una decoherencia en los sistemas cuánticos que no es despreciable (Ramzan, 2012). Este problema es estudiado por la información cuántica relativista (QRI por sus siglas en inglés), teoría en la que se fusionan conceptos de gravitación, teoría de campos y computación cuántica (Qiang et al., 2019). Hay que mencionar que existen importantes contribuciones en este campo respecto a sistemas tripartita y tetrapartita (Torres-Arenas et al., 2019; Dong et al., 2019). De acuerdo a estas referencias, el entrelazamiento no desvanece aún en aceleración infinita. A razón de la importancia y auge de los sistemas de comunicación y de redes cuánticas es importante estudiar y caracterizar el entrelazamiento en sistemas multipartita en marcos de referencia no inerciales, en particular los que son de mayor interés que son los sistemas máximamente entrelazados GHZ y los parcialmente entrelazados W-class (Wei et al., 2022).

1.2. Justificación

En fechas recientes se está viviendo toda una carrera a nivel mundial por demostrar la supremacía cuántica, en octubre del año 2019 Google anunció el éxito de haber logrado el cálculo de una secuencia de verdaderos números aleatorios que para la mejor de las computadoras clásicas le habría llevado 10,000 años resolver, al mismo tiempo IBM aseguró que esta noticia fue toda una exageración pues ellos afirman poder hacer el cálculo en solo tres días por medio de una optimización, a pesar de esto, en IBM reconocen que en Google van por buen camino y que solo es cuestión de tiempo para que por medio del aumento en el número de cúbits la computadora Sycamore no tenga rival clásica (Lichfield,). Como se puede hacer ver, el cómputo cuántico ha levantado el interés de muchas personas y empresas en todo el mundo, por ejemplo, en China se están invirtiendo cerca de 10,000 millones de dólares en investigaciones relacionadas al cómputo cuántico, en EUA 1,200 millones de dólares y en toda Europa se invierten 1,100 millones de dólares. Tales cantidades de recursos se gastan puesto que las computadoras cuánticas amenazan con poder descifrar cualquier tipo de encriptación, prometen poder simular sistemas químicos de muchos átomos y en general resolver los problemas intratables por el cómputo clásico (Marimar-Jiménez,). Por esto mismo los avances científicos y tecnológicos de investigaciones como esta traerán un gran beneficio para la sociedad.

1.3. Pregunta de investigación

¿Cómo son las medidas de entrelazamiento de estados GHZ y W-Class de sistemas cuánticos pentapartita en un marco de referencia no inercial?

1.4. Hipótesis

Las medidas de entrelazamiento residual total aritmético π_5 y geométrico \prod_5 permiten calcular y graficar el entrelazamiento como función de un parámetro $r \in [0, \pi/4]$, por lo que podemos cuantificar el entrelazamiento en aceleración infinita

1.5. Objetivos

General

- Investigar el entrelazamiento en sistemas pentapartita en marcos de referencia no inerciales a fin de describir su comportamiento y valores críticos.

Específicos

- Estudiar el estado del arte de sistemas cuánticos en marcos de referencia no inerciales para aprender sobre la forma en que se abordan este tipo de problemas.
- Proponer un sistema pentapartita en un marco de referencia no inercial que sirva para estudiar su entrelazamiento.
- Realizar experimentos computacionales del comportamiento de sistemas pentapartita en marcos de referencia no inerciales para conocer la relación entre el entrelazamiento y la velocidad relativa de los cúbits del sistema.

1.6. Contextos y delimitación

Este proyecto de investigación se contextualiza dentro del marco teórico de la investigación básica en el área de la informática cuántica relativista. Donde las tecnologías cuánticas han ido evolucionando y exigiendo una mayor comprensión y control de los sistemas cuánticos para su uso en fines tecnológicos. El entrelazamiento que es uno de los principales recursos cuánticos, necesario para la implementación de una gran mayoría de los protocolos y de los algoritmos cuánticos, es sujeto a un proceso de degradación del debido a la perspectiva de los observadores inerciales que lo miden. Por ello, es necesario conocer los límites de este desvanecimiento.

A la fecha hay importantes aportaciones en este terreno, estas basadas en el uso de una aproximación de modo único, la que es una buena aproximación para hacer este tipo de investigaciones, siempre y cuando una serie de requisitos se cumplan. Los trabajos en los que se basa esta investigación incluyen el estudio de sistemas de 3, 4 y 5 cúbits entrelazados,

donde se analizan las medidas de entrelazamiento: negatividad, entrelazamiento residual total y la entropía, todas estas consideradas en un marco de referencia no inercial.

El enfoque de esta investigación es una exploración que se da desde la perspectiva de las ciencias de la computación, sin embargo, se tiene en consideración dar seguimiento a todas las ciencias duras en las que este tema esta fundamentado, tales como: la mecánica cuántica, la relatividad y la teoría de campos. Luego con base en las experiencias y resultados aportados por otros autores, es que se tiene que delimitar este trabajo al caso de 5 cúbits entrelazados. Esto con el fin de cubrir adecuadamente todos los menesteres propios del programa de doctorado en el que es desarrollado.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Mecánica cuántica

En esta sección se desarrollaran de una manera breve todos los conceptos necesarios para sustentar el trabajo de tesis que aquí se presenta. Se habla de la mecánica cuántica, así como de la informática, la relatividad y la teoría de campos. En la sección de la mecánica cuántica, se revisan las definiciones básicas en las que se sustentan los conceptos de vector de estado y matriz de densidad. Durante la sección de informática, se estudian las nociones del concepto de información. Luego, en la sección de relatividad se exploran las bases de los conceptos de marco de referencia y se ve porque las leyes de la física son dependientes del observador. En la sección de la teoría de campos se presenta una revisión de las bases de teoría donde se fusionan la mecánica cuántica y la relatividad, de donde surge la teoría de los espinores. Para finalizar este capítulo, se mencionan a groso modo conceptos tales como el efecto Unruh y la aproximación de modo único. Estas ideas, son la piedra angular de este trabajo, ya que establecen un marco de trabajo para poder entender la dinámica de los sistemas cuánticos en los marcos de referencia no inerciales.

2.1.1. Las propiedades cuánticas de la materia

La teoría cuántica de la materia considera fenómenos que suceden a escala atómica. A estas escalas hay mucha sensibilidad por parte de los objetos interactuantes, incluso la

interacción con la misma luz crea grandes cambios. De hecho, al iluminar un electrón para saber dónde se encuentra; los fotones de luz lo golpean con un impulso $p = \frac{h}{\lambda}$ y el electrón sale volando para quién sabe dónde. Esto se enuncia en el principio de incertidumbre (Llano, 1996).

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.1)$$

Esta ecuación es una ley que nos dice que si se idea la forma de conocer con mayor precisión la ubicación de una partícula, entonces aumentará la incertidumbre en la cantidad de momento y al revés, si se logra conocer con mayor precisión la cantidad de momento, entonces aumentará la incertidumbre en la localización de la partícula, dando como resultado no poder saber con precisión dónde está el electrón.

Multitud de experimentos demuestran la precisión de la mecánica cuántica. Se dice que la mecánica cuántica es correcta en todo el universo y es igual a la mecánica clásica cuando las dimensiones de los sistemas son macroscópicos. En mecánica cuántica los sistemas exhiben el fenómeno de la cuantización, que es el hecho de dar la apariencia de que las cantidades observables como energía, posición, etc. no pueden ser continuas, sino que llegan a ser discretas. Solo existen en un especie de malla, donde los espacios intermedios quedan prohibidos. Por ejemplo, un electrón en un átomo está confinado a orbitar una región circundante al átomo, como si paredes infinitamente altas lo separaran del resto del universo y no lo dejaran salir. Además del principio de incertidumbre y la cuantización diversas leyes físicas y naturales tales como la conservación de la energía, el momento lineal, angular y principios simétricos de invarianza hacen su aparición con mucha intensidad a estas escalas (Sundermeyer, 2014).

De los cursos de mecánica teórica podemos inferir que los sistemas físicos clásicos macroscópicos que se pueden describir como funciones de las variables posición, momento y tiempo $F = F(q, p, t)$ cumplen que su derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.2)$$

Luego, haciendo uso de las siguientes relaciones consideradas como leyes de la física

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ p &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema. Llegamos a

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.4)$$

que para cuando F no depende del tiempo, da pie al concepto de corchete de Poisson.

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.5)$$

Esta ecuación concentra todas las propiedades asociadas de lo que se sabe acerca de la realidad física de nuestro universo (García,). En particular importa porque cuando las funciones conmutadas son q y p lo que tenemos es

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q} & \frac{\partial q}{\partial p} \\ \frac{\partial p}{\partial q} & \frac{\partial p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial q} \\ \frac{\partial p}{\partial p} \end{pmatrix} \\ \{q, p\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

que significa que el corchete de Poisson $\{q, p\}$ no conmuta.

De la misma manera en mecánica cuántica el corchete de Poisson es descubierto mediante la experimentación cuando por medio de la primera cuantización se asocian magnitudes físicas a operadores Hermíticos (de la Peña, 1996), por ejemplo:

$$\{q, p\} = 1 \rightarrow [Q_i, P_i] = \left[Q_i, \frac{\partial}{\partial Q_i} \right] = -i\hbar \quad (2.7)$$

Esta última es la ecuación de Max Born que saca a relucir la cantidad \hbar , una constante en mecánica cuántica que impone el límite mínimo para $QP - PQ$. Lo que matemáticamente

sugiere el entrar en el terreno de las operaciones matriciales, donde es común que

$$AB - BA \neq 0 \quad (2.8)$$

¡Vamos!, todo esto significa que la mecánica cuántica es una generalización de la mecánica clásica.

2.1.2. Sistemas cuánticos

Algunos conceptos en mecánica cuántica son presentados de una manera muy informal a manera de no ser repetitivo con respecto a las fuentes tradicionales.

Piense en una máquina de canicas (\mathcal{M}) (ver figura Fig. 2.1) con seis cajas dentro de esta. Las cajas están conectadas mediante tuberías. Las flechas indican la dirección que las canicas toman cuando se abren unas compuertas que estas tienen.

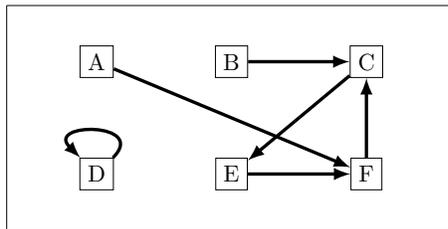


Figura 2.1: Esquema de la máquina \mathcal{M} . Las flechas representan la dirección que las canicas seguirán si se abren unas compuertas que estas tienen. Imagen adaptada del ejemplo 3.1.1 en la Ref.(Yanofsky and Mucci, 2008).

Se puede llenar \mathcal{M} con 27 canicas con en la figura 2.2. Esta configuración es llamada C_1 .

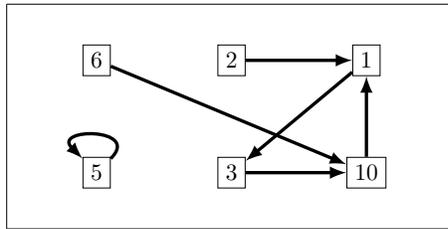


Figura 2.2: Esquema de la máquina \mathcal{M} donde se han llenado estas cajas con 27 canicas. Imagen adaptada del ejemplo 3.1.1 en la Ref. (Yanofsky and Manucci, 2008).

Entonces, se abren las cajas para que las canicas canicas avance a través de las tuberías de \mathcal{M} . Esta cambia su configuración a la que nombramos C_2 (ver figura Fig. 2.3).

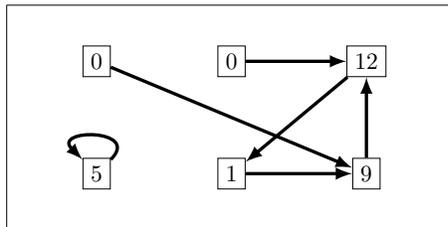


Figura 2.3: Esquema de la maquina \mathcal{M} donde se muestra el estado de \mathcal{M} luego de que se ha permitido el paso de las canicas a través de las tuberías.

Es decir, que \mathcal{M} cambia de la configuración C_1 a la configuración C_2 .

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Es posible describir a la máquina \mathcal{M} por medio de la matriz $M_{i,j}$.

$$M_{i,j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

esto se logra poniendo un 1 en la entrada (i, j) de $M_{i,j}$ siempre que una caja i está conectada por una tubería a la caja j o con ella misma. Por ejemplo, la entrada $(3, 1)$ tiene 1 ya que la caja B tienen una conexión con C .

Después de esto es posible recuperar la configuración C_2 haciendo

$$M_{i,j}C_1 = C_2 \quad (2.10)$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Arriba, es mostrado como describir un sistema discreto por medio del formalismo matricial. Los sistemas cuánticos también pueden ser descritos de esta manera. Donde, el comportamiento de los sistemas cuánticos es modelado por medio de matrices que son llamadas operadores, por ejemplo, a lo largo de esta explicación se define al operador \hat{A} . Este operador actúa sobre un vector columna (al que llamamos vector de estado, sea por ejemplo $|\psi_i\rangle$), el cual cambia al vector de estado $|\psi_i\rangle$ en un nuevo vector de estado $|\psi_j\rangle$ (Yanofsky and Manucci, 2008). Por tanto, esto puede ser escrito como

$$\hat{A} |\psi_i\rangle = |\psi_j\rangle \quad (2.12)$$

donde \hat{A} transforma la configuración $|\psi_i\rangle$ en la configuración $|\psi_j\rangle$ de la misma forma que $M_{i,j}$ transforma C_1 en C_2 .

2.1.3. Eigenvalores y eigenvectores

Para una simple explicación de todo el contexto que se da en la mecánica cuántica se hace uso de una propiedad conocida como *espín*, aunque se debe mencionar que existen muchas otras más. El espín es un momento angular intrínseco de los electrones que tiene dos posibles configuraciones, espín \uparrow y espín \downarrow . Puede ser visto en el experimento del Stern-Gerlach cuando un haz de electrones pasa a través de un campo electromagnético homogéneo. Este haz es deflectado hacia dos direcciones opuestas por su interacción con el campo. (ver el esquema de la Fig 2.4).

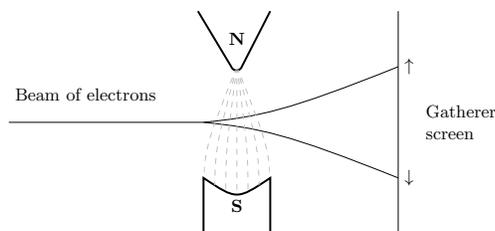


Figura 2.4: Esquema del experimento del Stern-Gerlach. Imagen adaptada de la sección 14 del blog de Armando Martínez: la-mecanica-cuantica.blogspot.com

Las mediciones de un sistema cuántico se pueden usar para construir un operador cuántico que represente a esta propiedad, esto por medio de poner las posibles mediciones a lo largo de la diagonal de la matriz. Así de esta manera, es que este operador es llamado observable. Por ejemplo, con los resultados discretos \uparrow y \downarrow en el experimento del Stern-Gerlach, el operador observable es

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

donde se codifica \uparrow y \downarrow como 1 y -1 respectivamente. Estas mediciones son llamadas también son llamadas eigenvalores del operador \hat{Z} . Los eigenvalores

$\{\lambda_i\}$ están relacionados con los engestados $\{|\psi_i\rangle\}$ por medio de

$$\hat{A} |\psi_i\rangle = \lambda_i |\psi_i\rangle \quad (2.14)$$

donde, esta fórmula es una simetría en los sistemas cuánticos que permite una remarcable simplificación de los problemas en mecánica cuántica (Lemus and Hernández-Castillo, 2015).

Los eigenestados son las posibles configuraciones que puede tomar un sistema. Para entender mejor esto, recordar las configuraciones C_1 y C_2 que se representaban por medio de vectores columna. Un eigenestado es una representación abstracta de uno de los estados en los que puede estar el sistema, por esta razón, un eigenestado y un eigenvalor están relacionados, pero estos no son iguales. Es decir, recordando otra vez la máquina de canicas \mathcal{M} , el estado es una configuración del estado interno de un sistema. Esta configuración es la que esta relacionada con las variables del sistema. Pero la configuración no es una variable.

A manera de resolver los eigenestados de un observable \hat{Z} , la ecuación característica se debe resolver. Para \hat{Z} , los eigenvalores son $\{1, -1\}$ y sus eigenestados son

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

donde la notación de Dirac es usada en el lado izquierdo, lo cual es común en mecánica cuántica.

2.1.4. El vector de estado

Los sistemas cuánticos son demasiado frágiles, tanto que con solo mirarlos estos son alterados. ¿Cómo puede ser medido algo que no puede ser mirado? Para resolver este problema, en la mecánica cuántica, el paradigma es que siempre que se mide un sistema cuántico, es posible medir cualquiera de los posibles estados en que el sistema pueda estar. Veamos como funciona esto con un ejemplito: imagine un intercambio de regalos, donde se acuerda que los posibles regalos serán: bufandas, guantes y tazas. Tu recibes tu regalo

dentro de una bolsa con un moño. ¿Qué hay dentro de la bolsa? Desde la perspectiva de la teoría, el regalo es una superposición probabilística de los tres regalos (ver la figura 2.5).

$$|\text{👛}\rangle = \alpha |\text{🎀}\rangle + \beta |\text{🍪}\rangle + \gamma |\text{🍷}\rangle$$

Figura 2.5: Representación pictórica de la superposición de los estados cuánticos del sistema “intercambio de regalos” $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$ y $|\gamma|^2$ son las probabilidades de obtener cierto regalo.

Luego, cuando miras dentro de la bolsa, se dice que la función de onda probabilística colapsa en la forma del regalo que te tocó. Esta es solo una manera de modelar los problemas no deterministas en mecánica cuántica, nadie ha dicho que físicamente el regalo sufra una transmutación de materia.

La superposición de los posibles estados que un sistema puede tomar es lo que es llamado vector de estado. Por ejemplo, en el caso del haz de electrones en el experimento del Stern Gerlach, el sistema cuántico espín-electrón puede estar en cualquiera de los siguientes estados.

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |0\rangle \text{ el espín del electrón es } \uparrow \\ |\psi_1\rangle &= |1\rangle \text{ el espín del electrón es } \downarrow \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \text{ podría ser cualquiera de los estados} \\ |\psi_3\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle \text{ es muy probable que el espín del electrón sea } \downarrow \\ |\psi_4\rangle &= \sqrt{\frac{1}{5}} |0\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |1\rangle \text{ es casi seguro que el espín del electrón es } \downarrow \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde, todos los ejemplos mostrados son vectores de estado. Los valores a la izquierda son amplitudes de probabilidad de los eigenestados.

2.1.5. La matriz de densidad

Ahora estamos interesados en encontrar la distribución de probabilidad $p(x)$ de el espectro de los posibles valores que el sistema puede tomar. Esta distribución está dada

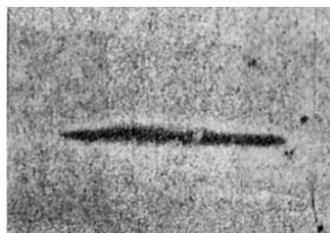
por la matriz de densidad $\hat{\rho}$. Esta es una generalización de $p(x)$ del mundo clásico. Para el caso del sistema espín-electrón del ejemplo, se puede proponer alguna de las posibles matrices de densidad $\hat{\rho}_Z$ dado alguno de los vectores de estado de Eq. (2.16), por ejemplo, tomemos (2.16), luego se tiene que multiplicar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\psi_Z\rangle \langle\psi_Z| &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{|0\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|}{2} \\ &= \hat{\rho}_Z \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde el vector de estado $|\psi_Z\rangle$ es multiplicado por su transpuesto conjugado $\langle\psi_Z|$. En forma matricial $\hat{\rho}_Z$ es

$$\hat{\rho}_Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Se aprecia que, sobre la diagonal de $\hat{\rho}_Z$, se leen los valores $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Estos son los valores de probabilidad $p(x)$ asociados a obtener 1 y -1 en el experimento del Stern-Gerlach (Mirar en la imagen 2.6) (Martínez, 2009). Esto significa que la población de electrones con espín \uparrow y la de electrones con espín \downarrow son 50-50% respectivamente. Esta es evidencia de que la distribución de probabilidad $p(x)$ de electrones dentro del haz es $(p(\uparrow) = \frac{1}{2}, p(\downarrow) = \frac{1}{2})$, por lo que habrá tantos electrones proyectados hacia arriba como hacia abajo (ver Fig. 2.6)



a)



b)

Figura 2.6: Espectro proyectado sobre una pantalla en el experimento Stern-Gerlach. a) imagen que muestra la dispersión cuando ningún campo electromagnético está presente. b) imagen que muestra el efecto de activar un campo electromagnético no homogéneo sobre el haz de electrones. Se puede ver que las poblaciones de electrones son simétricas en el eje vertical. Imagen obtenida de la sección 14 del blog de Armando Martínez: la-mecanica-cuantica.blogspot.com.

Como se ha mostrado, los eigenvalores de un operador son las posibles mediciones obtenidas en un experimento, de este modo, es natural decir que la distribución de probabilidad $p(x)$ es la diagonal de $\hat{\rho}_Z$. Sin embargo, se debe notar que $\hat{\rho}_Z$ no es lo mismo que \hat{Z} , la primera es una matriz de densidad y la segunda es un operador.

2.1.6. Entrelazamiento

Se trata de un fenómeno en el cual las variables de dos o más sistema físicos quedan correlacionadas tras interactuar. Esto significa que las variables de estos sistemas, que antes eran independientes en todo sentido, después de interactuar predeterminan los posibles estados del nuevo sistema. En aras de la claridad, si uno mide las variables cuánticas de una parte del sistema cuántico entrelazado, automáticamente podrá asegurar el valor de

el resto de las variables del sistema cuántico, a pesar de no haberlas medido.

El estudio de esta propiedad nace en el hecho de que hay sistemas físicos tales como el espín del electrón que obedecen leyes de conservación, que obligan al sistema a comportarse de cierta manera, estadísticamente hablando. Sin entrar en tanto detalle, se sabe que en un átomo de helio pueden orbitar dos electrones en su primer capa, éstos con sus *espines* orientados como $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. Esto debido a la conservación del momento de espín.

Se puede asociar a cualquier sistema cuántico una función de onda que se expresa por medio de un vector de estado en un espacio de Hilbert \mathbb{H} . En el caso de dos electrones, se habla de un ensamble donde una operación tensorial conocida como producto directo (\otimes) (Yanofsky and Manucci, 2008) define las posibles combinaciones de los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 &|0\rangle \otimes |0\rangle \\
 &|0\rangle \otimes |1\rangle \\
 &|1\rangle \otimes |0\rangle \\
 &|1\rangle \otimes |1\rangle
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde se ha ignorado la ley de conservación del momento angular. De forma genérica las funciones de estado que se pueden formar con estos vectores base son de la forma

$$|\psi\rangle = c_{0,0} |0\rangle \otimes |0\rangle + c_{0,1} |0\rangle \otimes |1\rangle + c_{1,0} |1\rangle \otimes |0\rangle + c_{1,1} |1\rangle \otimes |1\rangle \tag{2.20}$$

Esta función de estado lo que expresa son las combinaciones posibles donde en el átomo de helio, hay

- Un electrón e_1 con espín \uparrow , mientras el electrón e_2 tiene espín \uparrow , o
- Un electrón e_1 con espín \uparrow , mientras el electrón e_2 tiene espín \downarrow , o
- Un electrón e_1 con espín \downarrow , mientras el electrón e_2 tiene espín \uparrow , o
- Un electrón e_1 con espín \downarrow , mientras el electrón e_2 tiene espín \downarrow .

Sin embargo, debido a la conservación del momento angular, no todas las combinaciones son permitidas (Sakurai and Napolitano, 201) y el vector de estado para un par de electrones reales orbitando alrededor de un átomo de helio es

$$|\psi\rangle = c_{0,1} |0\rangle \otimes |1\rangle + c_{1,0} |1\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.21)$$

Puede suceder que el sistema cuántico formado por los dos cúbits en el átomo de helio [cúbit \equiv electrón] se separe y uno de los electrones se vaya a vagar por el espacio. El electrón en el átomo de helio y el electrón errante se dice que están entrelazados si sus *espines* logran conservar la orientación con la que quedaron configurados, tras su interacción dentro del átomo de helio. El electrón errante podría cruzar una distancia similar a una unidad astronómica [el tamaño de la vía láctea]. Y si nada lo perturbó en su camino, se dice que este último y su compañero, todavía dentro del helio, siguen entrelazados. Se debe comprender que el fenómeno del entrelazamiento surge en la teoría cuántica como efecto secundario de la naturaleza no determinista de los eventos, es decir, cuando los electrones están entrelazados en el átomo de helio, realmente no se sabe cuál electrón tiene qué espín, esto es lo que expresa la función de estado cuando superponemos los estado base del sistema bipartita $|01\rangle$ y $|10\rangle$. Luego cuando se hace la medición de uno de los cúbits, el resultado permite saber de manera determinista el valor del espín de la contraparte entrelazada.

A razón de la opacidad observada en la literatura y en el estado del arte respecto a la definición de entrelazamiento se propone la siguiente:

El entrelazamiento es un fenómeno que se da en la teoría cuántica donde las leyes de conservación de la física incrementan abrumadoramente la probabilidad de detectar ciertos estados en sistemas cuánticos bipartita.

2.2. Medidas de entrelazamiento

El entrelazamiento es un recurso muy frágil y tiende a perderse debido a la interacción que pueda tener con el ambiente. Es tema abierto en la investigación en cómputo cuántico

encontrar maneras de medir el entrelazamiento y como regenerarlo (en inglés se usa el término *distillation* para buscar acerca de este tema). Respecto a la medición, existen sobre todo criterios para valorar el entrelazamiento y su cantidad. Entre muchos los siguientes:

- La desigualdad de Bell.
- La concurrencia.
- El criterio de la transpuesta parcial positiva.
- El entrelazamiento de formación.
- La negatividad.
- El entrelazamiento residual π -tangle.
- La entropía.

La gran mayoría de estas medidas de entrelazamiento solo sirven para sistemas bipartita. Para sistemas de tres o más cúbits se suelen calcular el entrelazamiento bipartita entre los componentes del sistema. En menos palabras, no existe un método que mida directamente la cantidad de entrelazamiento en un sistema como un todo entrelazado de todos sus cúbits. Lo que se suele hacer es deducir éste [el entrelazamiento multipartita] a partir de la diferencia que hay respecto a la suma de todos los entrelazamientos bipartita, por ejemplo el entrelazamiento residual π -tangle aprovecha la desigualdad de Coffman-Kundu-Wooters para este fin (Coffman et al., 2000a).

2.2.1. Negatividad

Una matriz de densidad tiene asociada una distribución en el espacio fase, esta se obtiene mediante la transformada de Wigner. Sin embargo, esta distribución revela zonas de probabilidad negativa que clásicamente son prohibidas por la teoría de la probabilidad. Por tal motivo existe una formulación en mecánica cuántica que aprovecha esta propiedad de los sistemas cuánticos para caracterizar y medir el entrelazamiento cuántico en sistemas bipartita (Case, 2008). La negatividad se obtiene a partir de los eigenvalores negativos de

la transpuesta parcial de la matriz de densidad de un sistema cuántico (Vidal and Werner, 2002; Li et al., 2016). Una expresión explícita es la siguiente:

$$N_{\kappa\xi} = \|\rho_{\kappa\xi}^{T_\kappa}\| - 1 = 2 \sum_{i=1}^N |\lambda_{\rho_{\kappa\xi}}^{-T_\kappa}| \quad (2.22)$$

La norma de la traza de una transpuesta parcial ρ^{T_A} de un estado mezclado bipartita ρ_{AB} esencialmente mide el grado al cual ρ^{T_A} falla ser positiva, lo que constituye ser una versión cuantitativa del criterio de separabilidad de Peres (Peres, 1996), es decir, es una forma de saber si ρ_{AB} es separable y por consecuencia no cuántica, sino clásica.

Con la fórmula anterior podemos encontrar las negatividades de los enredos 1-1, 1-4 y 2-3 de los sistemas pentapartita correspondientes a 1,2,3,4 y todos los observadores en un marco de referencia no inercial. Esto es mediante expresiones de la siguiente forma (Manríquez-Zepeda et al., 2022):

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta\gamma\delta\eta} &= \|\rho_{\alpha\beta\gamma\delta\eta}^{T_\alpha}\| - 1 = 2 \sum_{i=1}^N |\lambda_{\rho_{\alpha\beta\gamma\delta\eta}}^{-T_\alpha}| \\ N_{\alpha\beta,\gamma\delta\eta} &= \|\rho_{\alpha\beta\gamma\delta\eta}^{T_{\alpha\beta}}\| - 1 = 2 \sum_{i=1}^N |\lambda_{\rho_{\alpha\beta\gamma\delta\eta}}^{-T_{\alpha\beta}}| \\ N_{\alpha,\beta} &= \|\rho_{\alpha\beta}^{T_\alpha}\| - 1 = 2 \sum_{i=1}^N |\lambda_{\rho_{\alpha\beta}}^{-T_\alpha}| \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2.2. Entrelazamiento residual total

Otra medida que se ha propuesto para la cuantificación del entrelazamiento es el promedio algebraico enredo- π . En (Coffman et al., 2000b; Oliveira and Ramos, 2010) se propone un sistema tripartita ρ_{ABC} donde se dice que los enredos A y B , más los enredos entre A y C , no pueden ser más grandes que los enredos entre A y el par BC . Esta desigualdad es tan fuerte como puede ser, en el sentido de que para cualquiera valores de los enredos que satisfagan la correspondiente igualdad, uno puede encontrar un estado cuántico consistente con aquellos estos valores (Coffman et al., 2000b). Esto significa que una medida del entrelazamiento puede ser obtenida a partir de un sistema como un todo, en contraste a la negatividad, que depende del par de observadores que están midiéndose.

En un sistema pentapartita esta medida se obtiene por medio de calcular los entrelazamientos residuales siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_A &= N_{A(BCDE)}^2 - N_{A(B)}^2 - N_{A(C)}^2 - N_{A(D)}^2 - N_{A(E)}^2 \\
\pi_B &= N_{B(ACDE)}^2 - N_{B(A)}^2 - N_{B(C)}^2 - N_{B(D)}^2 - N_{B(E)}^2 \\
\pi_C &= N_{C(ABDE)}^2 - N_{C(A)}^2 - N_{C(B)}^2 - N_{C(D)}^2 - N_{C(E)}^2 \\
\pi_D &= N_{D(ABCE)}^2 - N_{D(A)}^2 - N_{D(B)}^2 - N_{D(C)}^2 - N_{D(E)}^2 \\
\pi_E &= N_{E(ABCD)}^2 - N_{E(A)}^2 - N_{E(B)}^2 - N_{E(C)}^2 - N_{E(D)}^2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

luego con estas ecuaciones somos capaces de calcular el entrelazamiento residual total enredo- π_5 y Π_5 a partir de la siguiente fórmula:

$$\pi_5 = \frac{\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E}{5} \tag{2.25}$$

Además, existe la propuesta alternativa, el entrelazamiento residual total enredo Π_5 , que a diferencia de la anterior que es un promedio aritmético, este es un promedio geométrico.

$$\Pi_5 = (\pi_A \cdot \pi_B \cdot \pi_C \cdot \pi_D \cdot \pi_E)^{\frac{1}{5}} \tag{2.26}$$

2.2.3. Entropía

La entropía tiene al menos tres interpretaciones. La primera es la de la termodinámica clásica que surge de la pericia y análisis crítico y riguroso de investigadores como Clausius y Carnot que discernieron entre las evidencias experimentales que la entropía es una función de estado termodinámico similar a otras como son el volumen y la temperatura.

$$S = S(P, V, T)$$

La segunda, es la versión de la física estadística que la define como el número de microestados compatibles con la distribución de energía sobre las partículas de un sistema cuando este se encuentra en equilibrio termodinámico.

$$S = k \log(\Omega)$$

Sin embargo a mediados del siglo XX surge la aproximación de ser el valor esperado de la cantidad de bits necesarios para transmitir o almacenar información usando una codificación binaria.

$$H(x) = - \sum_x p(x) \log(p(x))$$

Esta suele ser interpretada como una medida de la incertidumbre de una variable aleatoria en el sentido de tomarla como una medida de la sorpresa de conocer un nuevo valor en eventos que son de naturaleza indeterminista.

2.2.4. Entropía en teoría de la información

La información en teoría de la información tiene el significado de ser el grado de asombro de obtener un mensaje en particular a partir de un conjunto de posibles mensajes. Es decir, se dice que si un altamente improbable evento ocurre, entonces se ha ganado más información que si hubiera ocurrido uno ordinario (Brillouin, 1960). Una expresión operativa de esta idea esta dada por

$$I = -\log_2(p(x)) \tag{2.27}$$

Por ejemplo, suponiendo que una tómbola tiene 2 pelotas rojas adentro, entonces si es elegida una bola de dentro de la tómbola, la información ganada es

$$I = -\log_2\left(\frac{2 \text{ pelotas rojas}}{2 \text{ pelotas en total}}\right) = -\log_2(1) = 0 \tag{2.28}$$

esto es, que no se ha ganado nueva información a partir del experimento porque el color de cualquiera de las pelotas era conocido por adelantado, ya que no había más opciones. Aún más, en este experimento no hay manera de contrastar información, por lo que no se puede proceder a construir un código con los elementos de este sistema.

Ahora suponga que hay una pelota roja y una azul dentro de la tómbola. Esta vez, cuando se elige una pelota de dentro de la tómbola se tiene que

$$I = -\log_2 \left(\frac{1 \text{ pelota roja}}{2 \text{ pelotas en total}} \right) = 1 \quad (2.29)$$

Esta vez, sí se ha ganado 1 bit de información. Información que puede ser usada para conocer el color de la siguiente pelota sin tener que hacer otro experimento de sacar una pelota de la tómbola.

En este orden de ideas, observe que, el valor esperado de la expresión I para un número grande de posibilidades es

$$E[I] = \sum_i p(i) I(n_i) = - \sum_i p(i) \log \left(\frac{n_i}{N} \right) \quad (2.30)$$

donde, $p_i = n_i/N$ es la probabilidad de un evento i . Nos preguntamos acerca del valor de los resultados si hacemos este tipo de experimentos muchas veces. Un ejemplo claro es adivinar la segunda letra de una palabra aleatoria en el lenguaje español. Donde el valor promedio que se obtiene de esta información es

$$H_2 = -p_a \log_2 p_a - p_b \log_2 p_b - \dots - p_z \log_2 p_z = 4.04 \text{ bits} \quad (2.31)$$

donde se ha etiquetado al resultado de este valor esperado con H , en alusión a la entropía de von Neumann ($H = \sum p_i \log_2(p_i)$). Si se da la pista de que la primera letra de tal palabra es una zeta, entonces la segunda letra de una palabra en español queda restringida a ser “a”, “o” o “u”(ya que palabras con “ze” y “zi” al principio son muy escasas). Luego entonces,

$$H_1 = -p_a \log_2 p_a - p_o \log_2 p_o - p_u \log_2 p_u = 0.91 \text{ bits} \quad (2.32)$$

después de esto, podemos hacer una diferencia de las informaciones,

$$I = -(H_2 - H_1) = 3.13 \text{ bits} \quad (2.33)$$

donde, se dice que se ha ganado esta cantidad de información gracias a la pista.

La entropía mide el grado de variabilidad de los elementos de un sistema, de modo que la información puede ser definida como

$$I = -(H_2 - H_1) \quad (2.34)$$

A manera de hacer más comprensible esta explicación vamos a suponer un lenguaje, donde las palabras pueden ser codificadas con solo 3 bits y exhiben la siguiente distribución de probabilidad $p(x)$ mostrada en la tabla 2.1

Tabla 2.1: Codificación de una fuente de información Información obtenida del ejemplo 1.1.2 en la Ref. (Cover and Thomas, 2006).

palabra	codeword	$p(x)$
mi	000	1/2
ma	001	1/4
me	010	1/8
mo	011	1/16
mu	100	1/64
pi	101	1/64
pa	110	1/64
po	111	1/64

Pero, se requiere transmitir mensajes de la manera más óptima posible a través de un canal de comunicaciones que ahorre recursos tanto como se pueda. Esto es posible con el siguiente código mostrado en la tabla 2.2).

Tabla 2.2: Codificación óptima del diccionario mostrado en la tabla 2.1

palabra	codeword	$p(x)$
mi	0	1/2
ma	10	1/4
me	110	1/8
mo	1110	1/16
mu	111100	1/64
pi	111101	1/64
pa	111110	1/64
po	111111	1/64

donde, el elemento más corto 0 es asociado a la palabra más usada “*mi*” ya que esto ayuda a compactar la mayoría de los mensajes. Así, otras palabras del código son optimizadas. El valor esperado de bits para transmitir mensajes con este código es,

$$E[\text{bits}] = \frac{1}{2}(1 \text{ bit}) + \frac{1}{4}(2 \text{ bits}) + \frac{1}{8}(3 \text{ bits}) + \frac{1}{16}(4 \text{ bits}) + \frac{4}{64}(6 \text{ bits}) = 2 \text{ bits} \quad (2.35)$$

Notar que $1 = \log_2(2)$, $2 = \log_2(4)$ y así con los demás, i.e.

$$E[\text{bits}] = \frac{1}{2} \log_2(2) + \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{1}{8} \log_2(8) + \frac{1}{16} \log_2(16) + \frac{4}{64} \log_2(64) = 2 \text{ bits} \quad (2.36)$$

que es lo mismo que

$$E[\text{bits}] = -\frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} \log_2\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16} \log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{4}{64} \log_2\left(\frac{1}{64}\right) = 2 \text{ bits} \quad (2.37)$$

donde la forma general de esta suma es el valor esperado

$$E[\text{bits}] = - \sum_x p(x) \log \left(p(x) \right) \quad (2.38)$$

Por tanto, la entropía en teoría de la información puede ser definida como el valor medio de tamaño óptimo de las palabras en un lenguaje.

$$H(n_i) = E[\log(p_i)] \quad (2.39)$$

Este resultado es formalmente establecido como el teorema de la codificación sin ruido de Shannon. Este es una base muy importante en las ciencias de la información (Wilde, 2017; Shannon, 1948).

Una cuarta definición es la entropía de von Neumann, que transporta la idea de la entropía de Shannon al mundo cuántico.

$$S(x) = - \sum_x \rho \log \left(\rho \right) = - \sum_x \lambda_i \log \left(\lambda_i \right)$$

donde ρ hace referencia a las matrices de densidad que definen las transiciones de probabilidad de los sistemas cuánticos y los λ_i son los eigenvalores de estas matrices de densidad (von Neumann and Beyer, 1996; Bengtsson and Życzkowski, 2006).

A fin de encontrar una reconciliación de los términos se propone la siguiente definición:

La entropía es la medida en la variabilidad de los estados o los elementos de un sistema dadas las reglas que operan sobre éste por un tiempo.

Veamos un ejemplito: piense en su oficina donde trabaja. Cuando el de intendencia va a arreglar la oficina él pone todas las cosas en los lugares apropiados. Digamos que, el de intendencia guarda las plumas en el cajón del escritorio y las libretas en un estante. Luego el de intendencia te dice que la oficina esta ordenada. Pero al cabo de los días que vas a trabajar vas dejando las plumas y las libretas junto a la computadora. Luego si un día alguien le pregunta al de intendencia donde se encuentran las libretas, el diría que éstas están sobre la repisa. Pero la situación real es que la oficina evoluciono hasta el estado en que las libretas y las plumas están junto a la computadora. Ya sea que te conviene por

optimización de tus actividades o porque eres una persona desordenada, se puede ver esto como que existe fuerzas que operan dentro de la oficina que tienden a establecer un orden en particular. Con la entropía se puede medir la diferencia respecto a este orden. Para él de intendencia la entropía 0 significaría que las cosas están donde él las acomodó, y la entropía 1 significaría que las cosas pueden estar en cualquier lugar de la oficina.

En teoría de la información lo podemos ver en el hecho de que la optimización en el uso de los lenguajes siempre tiende a establecer los mecanismos más eficientes de comunicación. Por ejemplo, la evolución del lenguaje tiende a simplificar expresiones como «pues» a «pus» o «entonces» a «tons», así mismo, una complicada descripción de buen animo y felicidad se puede expresar simplemente como «:D», lo que simplifica y eventualmente puede servir para optimizar el almacenamiento y transferencia de información entre las personas.

Estudiamos el entrelazamiento de los sistemas pentapartita en marcos de referencia no inercial por medio de la entropía ya que es bien sabido que los estados puros de un sistema cuántico suelen tener menor entropía que partes del sistema (Wilde, 2017), lo que es útil en la caracterización del grado de entrelazamiento de los sistemas pentapartita ya que la aceleración de las partículas tiende incrementar la generación de los estados de antipartícula por lo que la traza parcial sobre estos estados tiende a producir matrices de densidad más mezclada, en otras palabras, los estado son cada vez más clásicos y por ello aumenta el valor de la entropía del sistema conjunto.

2.3. Relatividad

2.3.1. Marcos de referencia no inerciales

299, 792, 458 m/s (c) es la velocidad de la luz, aunque suele aproximarse a 3×10^8 m/s. La luz es nuestro medio de comunicación más importante, pues permite la transferencia de información a esta increíble velocidad. Sin embargo, c es una velocidad límite dentro del vasto universo con leyes de la física invariantes para todos los observadores. Esto es, de alguna dos observadores inerciales con distintas velocidades relativas deberían resolver medir la misma magnitud c a pesar de ser observadores relativos. O sea, si hubiera un

observador en un marco de referencia MR_1 con velocidad relativa respecto a otro observador en un marco de referencia MR_2 a exactamente $0.9999c$, uno pensaría que estos observadores estarían a solo una fracción del cálculo de la velocidad de la luz midiendo su diferencia con respecto a ella como de solo 29979.2 m/s ($\tilde{1}07$ km/h), técnicamente cualquiera podría ir más rápido que un rayo de luz con solo subirse a su automóvil y acelerar un poco, pero sirva dejar claro que no es lo que pasa, sino que en realidad, aún en estas circunstancias ambos observadores miden c como la velocidad de la luz (Hartle, 2021). Reflexione un poco sobre cómo podría ser esto cierto. Para entender lo que pasa hay que ver que estamos acostumbrados a un mundo euclídeo, donde 1 metro siempre es un metro y 1 segundo siempre es un segundo. Pero como los experimentos hasta el momento parecen confirmar la constancia de c tenemos que la constancia de las mediciones previas son las que se tienen que ver modificadas ante el cambio de un marco de referencia inercial.

2.3.2. Transformaciones de Lorentz

En la figura 2.7 se ilustra mediante un diagrama de Minkowski nuestro marco de referencia y el de un observador inercial a $0.33c$, el diagrama de Minkowski es una representación del espacio-tiempo donde se considera al tiempo como una coordenada más. Por otro lado para bien de la simplicidad se suele graficar solo una de las coordenadas cartesianas, en este caso x .

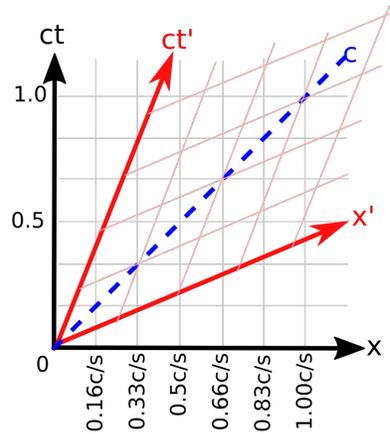


Figura 2.7: Ejes color negro. Descripción gráfica de nuestro marco de referencia (*LABFRAME*). Ejes color rojo. Descripción gráfica del marco de referencia de un observador con velocidad $0.33c$.

Obsérvese en la figura 2.7 que hay dos ejes de color rojo con etiquetas ct' y x' . Estos corresponden al marco de referencia con velocidad $0.33c$. Esto es así porque la velocidad relativa entre nuestro marco de referencia MR_1 y el marco de referencia a $0.33c$ es modelado como la deformación del espacio euclídeo MR_2 . Más aún, en azul se muestra la máxima velocidad alcanzable, o sea c . De este modo dos marcos de referencia pueden medir la misma c .

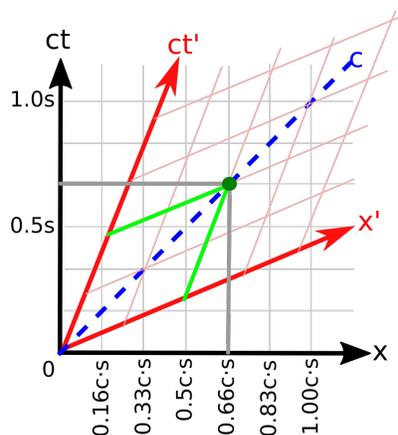


Figura 2.8: Ilustración de la medición de la velocidad de la luz por parte de dos observadores inerciales cada uno en su marco de referencia. Las líneas en gris son las mediciones correspondientes en el *LABFRAME*. Las líneas verdes corresponden al marco de referencia con velocidad relativa diferente a la nuestra.

Asimismo en la figura 2.9 se ilustran los efectos de la contracción de las longitudes y la dilatación del tiempo producto de las transformaciones relativistas entre marcos de referencia inerciales. Como podemos apreciar en la figura 2.9 la longitud del vector verde mide en el nuestro marco de referencia 179,803 km. mientras que en el marco de referencia rojo el espacio ocupado es de 0 metros (contracción de las distancias). Por otro lado el tiempo transcurrido en el vector verde en nuestro marco es de 0.5 segundos, mientras que para el marco rojo se dice que han transcurrido 5.7 años (dilatación del tiempo)(Tipler, 2014).

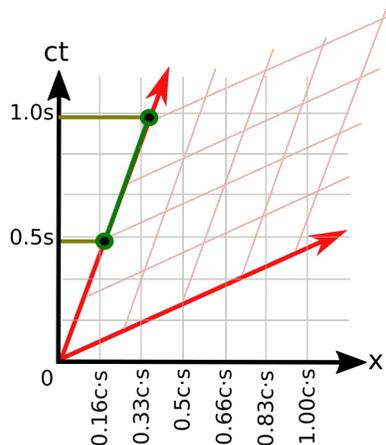


Figura 2.9: Ilustración de un vector verde en el espacio de Minkowski.

Las transformaciones de las que se habla son las transformaciones de Lorentz, éstas son

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 \\x^{1'} &= -\gamma \beta x^0 + \gamma x^1\end{aligned}\tag{2.40}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$.

estas resuelven matemáticamente los tiempos y las distancias que los observadores en otros marcos de referencia miden en función de lo que se mide en el *LABFRAME*. A pesar de que pudiera parecer que este tipo de fenómenos solo se pueden apreciar al hablar de naves espaciales viajando a velocidades cercanas a la luz, lo cierto es que la teoría de la relatividad tiene importantes aplicaciones en fenómenos de carácter cuántico (White, 1992).

Hay que dejar claro que lo que cada observador mide en su marco de referencia (tiempo o longitud) es un objeto tan real como cualquier cosa en nuestro espacio-tiempo y que sus propiedades realmente no están cambiando por el hecho de cambiar de marco de referencia. Es decir, si un viajero dentro de un tren en movimiento ($v \neq 0$) mide el tamaño de un paquete de galletas y obtiene un resultado, debería ser cierto que el observador

estático ($v = 0$) al medir el paquete de galletas desde su posición obtuviera el mismo resultado (Smith, 1978). Para intentar aclarar la paradoja se puede hacer uso de un vector en el espacio tiempo de Minkowski. Esto porque del teorema de Pitágoras sabemos que si tenemos un vector en el espacio tiempo podemos obtener su magnitud a partir del producto interno consigo mismo (ecuación (2.41)).

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = |A| \quad (2.41)$$

donde

$$\bar{A} = x^0 e_0 + x^1 e_1 \quad (2.42)$$

y donde los superíndices en x^0, x^1 no significan potenciación, sino que, son parte de la notación en relatividad que significa

$$\begin{aligned} x^0 &\equiv ct \\ x^1 &\equiv x \\ x^2 &\equiv y \\ x^3 &\equiv z \end{aligned} \quad (2.43)$$

Entonces hacemos $\bar{A} \cdot \bar{A}$ para el observador en el marco de referencia con velocidad relativa a la nuestra

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{A} &= x^{\gamma'} e_{\gamma'} \cdot x^{\beta'} e_{\beta'} \\ &= x^{\gamma'} x^{\beta'} e_{\gamma'} \cdot e_{\beta'} \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde se aclara que

$$x^i e_i = \sum_i x^i e_i \quad (2.45)$$

es la notación de Einstein para sumatorios. Además de que los productos

$$e_i \cdot e_j = g_{ij}$$

Finalmente el producto $\bar{A} \cdot \bar{A}$ queda

$$\begin{aligned} &= x^{0'} x^{0'} g_{00} + x^{1'} x^{1'} g_{11} \\ &= -x^{0'} x^{0'} + x^{1'} x^{1'} \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde en este paso se hace uso de la métrica en el espacio-tiempo de Minkowski cuyos términos g_{ij} son (Emam, 2021):

$$\begin{aligned} g_{00} &= e_0 \cdot e_0 = -1 \\ g_{01} &= e_0 \cdot e_1 = 0 \\ g_{10} &= e_1 \cdot e_0 = 0 \\ g_{11} &= e_1 \cdot e_1 = 1 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por lo que, al calcular la magnitud de un vector tenemos:

$$\begin{aligned} -(x^{0'})^2 + (x^{1'})^2 &= \gamma^2[-(x^0)^2 - \beta^2(x^1)^2 + 2\beta x^0 x^1] + \gamma^2[(x^0)^2 \beta^2 + (x^1)^2 - 2\beta x^0 x^1] \\ \gamma^2[-(1 - \beta^2)(x^0)^2 - (\beta^2 - 1)(x^1)^2] &= \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_{\text{siendo esto igual a 1}} [-(x^0)^2 + (x^1)^2] \end{aligned} \tag{2.48}$$

El significado de esta ecuación es que lo que se mide en un marco de referencia *prima* es igual a lo que se mide en nuestro marco de referencia.

2.3.3. Línea de mundo de un observador acelerado

Cuando se habla de un observador acelerado se quiere decir que éste aumenta continuamente su velocidad y eventualmente alcanza la velocidad de la luz c . En el diagrama de Minkowski la línea de mundo de este tipo de observador es como se ilustra en la figura (2.10).

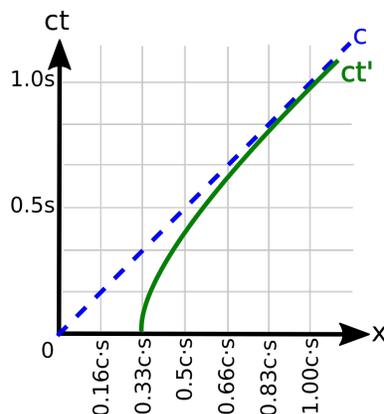


Figura 2.10: Línea de mundo de un observador acelerado en un espacio-tiempo de Minkowski.

Este es el marco de referencia no inercial al que se someten objetos sujetos a la atracción gravitacional o bien partículas atraídas por fuerzas nucleares. Estos son llamados observadores no inerciales. El efecto percibido por estos, sería como caer dentro de un cubo de elevador sin información alguna sobre el exterior. El observador en estas condiciones establece su posición —continuamente cambiante— como su marco de referencia inercial. Con estas ideas se debe comprender que este tipo de observadores pueden describir y descubrir las leyes de la física tal y como nosotros las conocemos en nuestro marco de referencia, incluso miden la misma velocidad de la luz c que nosotros.

De alguna manera todos los marcos de referencia inerciales ven el mundo tal y como nosotros lo percibimos, a pesar de que todos calculamos la misma velocidad de la luz, esto es nada intuitivo. Por esta razón el punto de partida en el estudio del espacio-tiempo es la métrica, que nos brinda las conversiones necesarias para escalar apropiadamente las magnitudes entre marcos de referencia. En el caso del observador acelerado ésta se resuelve comenzando por analizar lo que se conoce como el “elemento de línea”.

$$ds^2 = (-1)(dx^0)^2 + (1)(dx^1)^2 = (-1)(dx^{0'})^2 + (1)(dx^{1'})^2 \quad (2.49)$$

donde $x^0 = ct$, la línea de mundo del *LABFRAME*, $x^1 = x$, el eje x común y los términos

-1 y 1 corresponden a los términos g_{00} y g_{11} respectivamente.

Así entonces, calculamos un vector de cambio sobre la curva de la línea de mundo de un observador acelerado. A este vector se le nombra cuadvivector \underline{u} (ver figura 2.11). Este es una cuadvivelocity en el sentido de que se deriva con respecto del tiempo (τ) del observador acelerado —que esta dilatándose continuamente por efecto de la aceleración—.

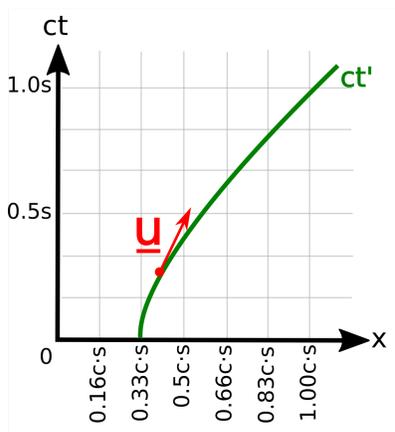


Figura 2.11: Ilustración de un cuadvivector velocidad. Este es tangente a la línea de mundo de un observador acelerado.

Es buen momento para presentar el concepto de comóvil. Un observador comóvil es aquel observador inercial cuyo marco de referencia es instantáneamente igual a un observador no inercial. Este concepto se usa como un recurso analítico para estudiar al observador acelerado por medio de observadores comóviles tangentes a la línea de mundo de un marco de referencia no inercial (García,).

Para la derivación de las ecuaciones de movimiento de un observador acelerador derivamos las componentes de un vector en el espacio-tiempo.

$$\underline{u} = \frac{dct}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}e_1 \quad (2.50)$$

Si se calcula $\underline{u} \cdot \underline{u}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{u} &= \left(c \frac{dt}{d\tau} e_0 + \frac{x}{d\tau} e_1 \right) \cdot \left(c \frac{dt}{d\tau} e_0 + \frac{x}{d\tau} e_1 \right) \\ &= -c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2\end{aligned}\tag{2.51}$$

donde se usaron los términos $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j = g_{ij}$ obtenidos de la métrica.

Por otro lado el elemento de línea ds^2 que debe ser igual en ambos marcos de referencia nos dice lo siguiente

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 d\tau^2\tag{2.52}$$

Esto es así porque un cuadrivector velocidad es también la pendiente que se forma de un cierto avance en el eje x entre un cierto lapso de tiempo en el eje ct , lo cual se definió como la línea de mundo del observador en el marco de referencia con velocidad distinta a la nuestra. Por lo que decimos que el vector \underline{u} no tiene componente x' . Así pues si se divide entre $d\tau$ se tiene

$$-c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = -c^2\tag{2.53}$$

que es exactamente lo mismo que se obtuvo en la ecuación (2.51), por lo que se concluye que

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -c^2\tag{2.54}$$

La cuadri-aceleración en el espacio-tiempo es un vector sobre el eje x' pues la dirección de movimiento y de aceleración es la misma. De esta manera el cuadrivector aceleración es ortogonal al cuadrivector velocidad (ver figura (2.12)). Por lo que

$$\underline{a} \cdot \underline{u} = 0\tag{2.55}$$

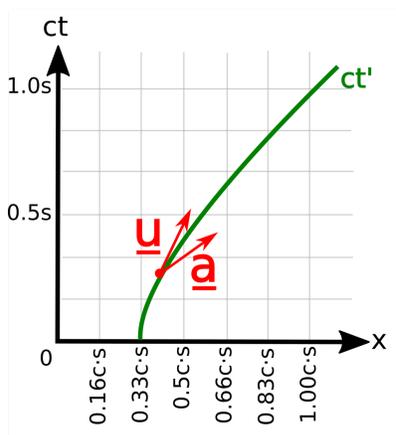


Figura 2.12: Ilustración de los cuadvectores aceleración y velocidad en el espacio-tiempo. En el marco de referencia de un observador comóvil con velocidad constante estos vectores son ortogonales.

La aceleración de la que estamos hablando y la conocida por toda fuerza central es una cantidad cuya magnitud es constante, esto quiere decir que

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = a^2 \quad (2.56)$$

$a^2 = \text{constante}$, de este modo

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{a} &= (a^0 e_0 + a^1 e_1) \cdot (a^0 e_0 + a^1 e_1) \\ &= -(a^0)^2 + (a^1)^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

No confundir el hecho de que en el marco de referencia acelerado, el vector aceleración es siempre colineal; esto se debe a que en dicho marco la dirección de los vectores directores esta cambiando de dirección continuamente mientras aumenta de velocidad el observador (Smith, 1978). Por otro lado, en el marco de referencia en reposo (*LABFRAME*) las cosas se miden usando una base de vectores ortogonales fija.

Una solución para la ecuación obtenida (2.57) es

$$a^2 \cosh^2(b\tau) - a^2 \sinh^2(b\tau) = a^2 \quad (2.58)$$

o sea que

$$\begin{aligned} a^0 &= a \sinh(b\tau) \\ a^1 &= a \cosh(b\tau) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Recordemos que $a^0 = \frac{du^0}{d\tau}$ y $a^1 = \frac{du^1}{d\tau}$. A partir de esto integramos para obtener \underline{u}

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= a \sinh(b\tau) \rightarrow u^0 = \frac{a}{b} \cosh(b\tau) + A \\ \frac{du^1}{d\tau} &= a \cosh(b\tau) \rightarrow u^1 = \frac{a}{b} \sinh(b\tau) + B \end{aligned} \quad (2.60)$$

y luego mediante la relación $\underline{c} \cdot \underline{c} = -c^2$ veremos cuanto vale b .

$$\begin{aligned} \underline{c} \cdot \underline{c} &= -(u^0)^2 + (u^1)^2 = -\left(\frac{a}{b} \cosh(b\tau) + A\right)^2 + \left(\frac{a}{b} \sinh(b\tau) + B\right)^2 \\ &= -\frac{a^2}{b^2} \left(\underbrace{\cosh^2(b\tau) - \sinh^2(b\tau)}_{\text{igual a 1}}\right) - A^2 + B^2 + \frac{2a}{b} (-A \cosh(b\tau) + B \sinh(b\tau)) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Pero como esta ecuación debe ser siempre una constante, no puede existir ninguna dependencia, por lo que, se escogen $A = B = 0$ ¹. Esta elección conlleva a

$$-\frac{a^2}{b^2} = -c^2 \rightarrow b = \frac{a}{c} \quad (2.62)$$

Sustituyendo b en las ecuaciones de la dinámica, solo resta obtener las ecuaciones de

¹En realidad se puede resolver también si $A = \sinh(b\tau)$, $B = \cosh(b\tau)$, produciendo un resultado que es prácticamente igual.

movimiento.

$$\begin{aligned} a^0 = a \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) &\xrightarrow{\text{integrando}} u^0 = c \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \xrightarrow{\text{integrando}} ct = \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) + A \\ a^1 = a \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) &\xrightarrow{\text{integrando}} u^0 = c \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \xrightarrow{\text{integrando}} x = \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a}{c}\tau + B\right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde estableciendo las condiciones iniciales ($\tau = 0, x_0$) producen $A = 0$ y $B = x_0 - \frac{c^2}{a}$. Y las ecuaciones de movimiento para un observador acelerado quedan como

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \\ x &= \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) + \left(x_0 - \frac{c^2}{a}\right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Despejando $\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$ y $\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$, elevándolas al cuadrado y restándolas se combinan estas ecuaciones paramétricas, es decir

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right) - \sinh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right) &= 1 \\ &= \left(\frac{ax}{c^2} - \frac{ax_0}{c^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{a^2t^2}{c^2}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Luego, resolviendo para $x(t)$ se tiene

$$x(t) = x_0 - \frac{c^2}{a} \pm \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{at^2}{c}\right)^2} \quad (2.66)$$

cuya gráfica se muestra a continuación.

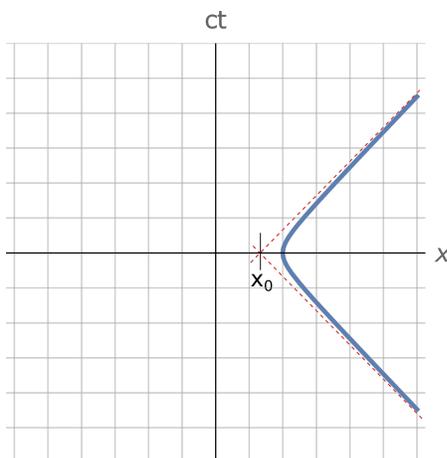


Figura 2.13: Gráfica de la ecuación (2.66). En la gráfica se han hecho $a = c = 1$ y $x_0 = 5$.

Como se puede ver en la gráfica (2.13) las ecuaciones paramétricas describen una curva hiperbólica con vértice en x_0 (Kaufmann et al., 1977).

2.3.4. Coordenadas de Rindler

En el espacio de Minkowski se vio al elemento de línea

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.67)$$

esta es una magnitud escalar infinitesimal del espacio-tiempo. Es perfectamente válida entre cualesquiera marcos de referencia inerciales. Pero si se tiene que describir desde el *LABFRAME* magnitudes como la longitud y el tiempo transcurrido en un marco de referencia no inercial, se requiere obtener la métrica en el espacio-tiempo de Rindler.

Lo primero que se requiere hacer es desplazar $x_0 = \frac{c^2}{a}$ en las ecuaciones (2.68). Lo que se está logrando de esta manera es que el eje x' de cualquier observador acelerado pase por el origen de coordenadas de nuestro marco de referencia (ver figura(2.14)). Esto con

el fin de facilitar los cálculos más adelante (Wald, 1984).

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \\ x &= \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

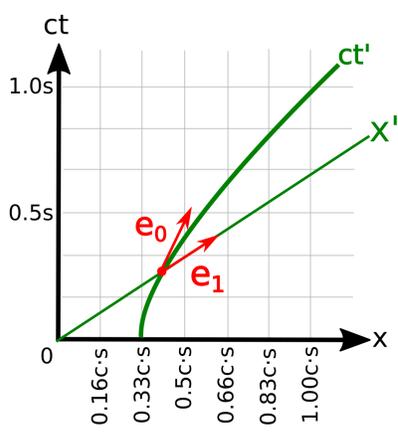


Figura 2.14: Ilustración del eje x' de un observador comóvil tangente a un observador acelerado. Notar que haciendo $x_0 = \frac{c^2}{a}$ el eje x cruza nuestro origen de coordenadas.

Usando las ecuaciones paramétricas Ec. (2.68) evaluamos en el evento en el espacio-tiempo ubicado en $(0, 1)$, esto es, el momento en el que el tiempo en el *LABFRAME* y en el marco acelerado son igual a cero y la posición es $x = 1$.

$$\frac{c^2}{a} = 1 \rightarrow \frac{a}{c} = c \tag{2.69}$$

Con esto se restringen las ecuaciones paramétricas a solo un marco de referencia *MR1* que pasa por $x = 1$.

$$\begin{aligned} ct &= \sinh(c\tau_1) \\ x &= \cosh(c\tau_1) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Repetimos este último movimiento pero para un marco acelerado que pase por $x=2$ ($MR2$). Quedándonos las ecuaciones restringidas al observador que esta a la distancia $x = 2$ de nosotros.

$$\begin{aligned} ct &= 2 \sinh\left(\frac{c}{2}\tau_2\right) \\ x &= 2 \cosh\left(\frac{c}{2}\tau_2\right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Luego, es posible asociar las Ec. (2.70) y (2.71) mediante la siguiente observación. Si dividimos $\frac{ct}{x}$ obtenemos:

$$ct = x \operatorname{tgh} c\tau_1 \quad (2.72)$$

Y si se hace lo mismo para el marco acelerado $MR2$ tenemos

$$ct = x \operatorname{tgh} \frac{c}{2}\tau_2 \quad (2.73)$$

de modo que la condición para que estén vinculados los diferentes marcos de referencia a nuestro $LABFRAME$ es que,

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} \frac{c}{2}\tau_2 &= \operatorname{tgh} c\tau_1 \\ \frac{c\tau_2}{2} &= c\tau_1 \end{aligned} \quad (2.74)$$

o bien, generalizando para cualquier marco de referencia inercial

$$cT = \frac{c}{r}\tau \quad (2.75)$$

siendo T el tiempo propio en $MR1$, r el valor de x al tiempo cero y τ el tiempo propio de

un observador acelerado arbitrario.

De este modo las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} ct &= r \sinh(cT) \\ x &= r \cosh(cT) \end{aligned} \tag{2.76}$$

Finalmente para llegar a la métrica y al elemento de línea en el espacio de Rindler simplemente se calculan los Jacobianos de la transformación.

$$\begin{aligned} e_{ct} &= \frac{\partial ct}{\partial cT} e_0 + \frac{\partial x}{\partial cT} e_1 = r \cosh(cT) e_0 + r \sinh(cT) e_1 \\ e_r &= \frac{\partial ct}{\partial r} e_0 + \frac{\partial x}{\partial r} e_1 = \sinh(cT) e_0 + \cosh(cT) e_1 \end{aligned} \tag{2.77}$$

de donde usando las Ec. (2.47) se calculan los elementos de la métrica.

$$\begin{aligned} g_{0'0'} &= e_{cT} \cdot e_{cT} = -r^2 \\ g_{0'1'} &= g_{1'0'} = 0 \\ g_{1'1'} &= e_r \cdot e_r = 1 \end{aligned} \tag{2.78}$$

de donde se obtiene para el elemento de línea.

$$ds^2 = -r^2 c^2 dT^2 + 1 dr^2 \tag{2.79}$$

El espacio de Rindler es la versión no inercial del espacio de Minkowski, por lo que este elemento de línea sirve para obtener transformaciones similares a las de Lorentz que relacionan al marco de referencia inercial con el no inercial (García,). Para los fines de este trabajo, tener una noción de la relatividad es crucial para comprender el efecto Unruh. Este último siendo el causante del desdoblamiento de los modos de frecuencia del estado base $|0\rangle$ y del primer excitado $|1\rangle$ en el espacio de Minkowski en modos de frecuencia de Rindler en las regiones I (de partícula) y II (de antipartícula) (ver figura 2.15). [En teoría

cuántica de campos, un modo de frecuencia es el equivalente al estado puro de un sistema cuántico, donde se consideran los efectos relativistas.]

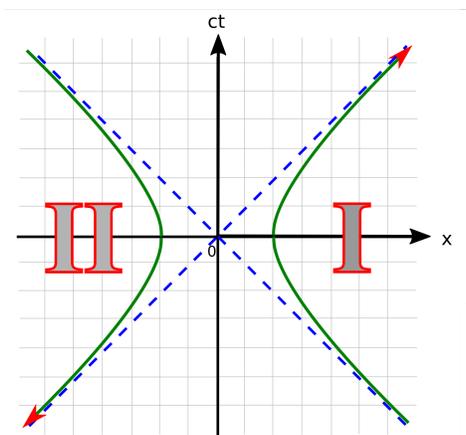


Figura 2.15: Líneas de tiempo de un marco de referencia no inercial. Se han dibujado dos asíntotas a las curvas ct' para indicar que es imposible que un rayo de luz desde la región II pueda en algún momento en el futuro tocar algún evento de la región III.

Se dice que II y III están desconectadas casualísticamente, esto es, que no es posible intercambiar información de una región a la otra. Esto se debe a que un rayo de luz emitido desde cualquier evento sobre las hipérbolas puede ser emitido desde una región hacia la otra, pero debido a las propiedades geométricas de estas curvas dicho rayo pasa asintóticamente respecto a los eventos de la otra región. De modo que no hay manera física de interconectar eventos entre estas dos regiones (Emam, 2021).

2.4. Teoría de Campos

Se trata de una formulación de la física de nuestro universo en la que se supone un universo como un continuo de entes excitables que están interconectados unos con otros. Como ejemplo piense en un estanque de agua quieto, que reacciona ante el golpe de una piedra que lo perturba y excita todos los puntos de su superficie. Al principio, la popularidad de

este concepto fue de gran utilidad en teorías como el electromagnetismo, la elasticidad, la dinámica de fluidos y la relatividad, esto debido a que una teoría de campos permite describir la evolución de un campo físico, así como las interacciones con el entorno y consigo mismo (García,).

Un prototipo de un teoría de campos en una dimensión en el caso particular de un sistema de resortes anclados en serie es como se muestra en la figura (2.16). Notar que los puntos rojos se pueden mover en cualquier dirección, de modo que los resortes se pueden elongar o comprimir. Las distancias a es la separación que tienen los puntos rojos cuando los resortes están relajados y las q_i son las distancias que se estiran o comprimen los resortes según corresponda cuando los puntos rojos se han desplazado.

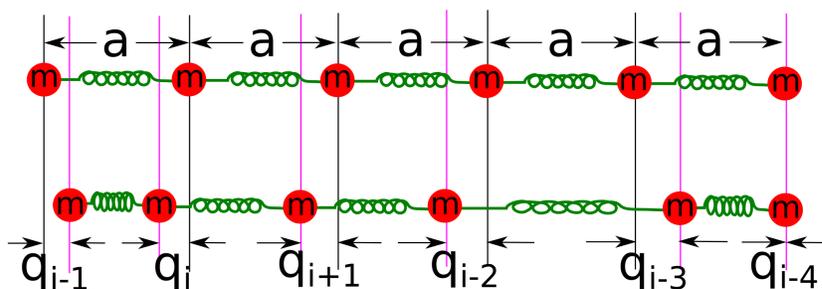


Figura 2.16: Ilustración de un conjunto de resortes que ejemplifican el prototipo de un campo en un medio mecánico.

El prototipo de campo con soporte mecánico se modela físicamente por medio del siguiente Lagrangiano.

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{k}{2} \sum_i (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (2.80)$$

Donde k es la constante de los resortes y m la masa de cada punto rojo. Se puede hacer la siguiente observación basada en la figura (2.17). Si contamos las masas en una región de $2a$ unidades vemos que sumamos $2m$, luego es fácil ver que la densidad de masa es $\rho = m/a$. Si procedemos de la misma manera para cualquier longitud se puede ver que la densidad siempre es la misma.

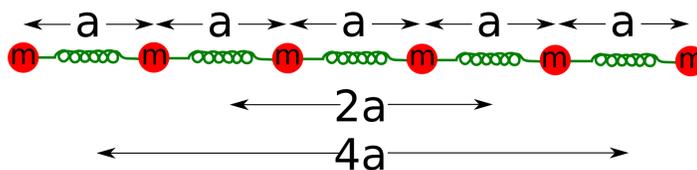


Figura 2.17: Ilustración que facilita el notar que la densidad de masa de este prototipo es de $\rho = \frac{m}{a}$.

Como un punto rojo cualquiera en medio de dos resortes es jalado por las fuerzas de restauración de los dos resortes se habla de una tensión promedio $\tau = ka$ en lugar de una fuerza ka .

Sustituyendo estas relaciones tenemos

$$L = a \sum_i \left(\frac{\rho}{2}\right) \dot{q}_i^2 - a \sum_i \left(\frac{\tau}{2}\right) \left(\frac{\Delta q}{a}\right)^2 \quad (2.81)$$

Donde se ha introducido un $1 = \frac{a^2}{a^2}$ en el segundo término para poder despejar después el valor a que queda a la izquierda del segundo término.

Los índices i hacen referencia a los puntos, de modo que, se puede ubicar la posición de cada punto rojo por medio de la operación ia , donde la ubicación del i -ésimo punto rojo será i veces a . Admitiendo esto y modelando nuestro prototipo como algo más abstracto, en particular, una versión del mismo donde la distancia a entre cada punto rojo se estreche tanto que ésta sea infinitesimal nos lleva a proponer la siguiente asignación.

$$\begin{aligned} i &\longmapsto x \\ q_i &\longmapsto \phi(x, t) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Quedando el Lagrangiano definido como

$$L = \int dx \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2.83)$$

Para simplificar aún más esta expresión se hace explícito por medio de un análisis de unidades que $\rho = \tau/v^2$.

$$\begin{aligned} [\text{densidad } \rho] &= \left[\frac{\text{metros}}{\text{longitud}} \right] \\ [\text{fuerza } \tau] &= [\text{masa}] \left[\frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}^2} \right] \\ \left[\frac{\text{fuerza } \tau}{\text{densidad } \rho} \right] &= \left[\frac{\text{masa} \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}^2}}{\frac{\text{masa}}{\text{longitud}}} \right] \\ \left[\frac{\text{fuerza } \tau}{\text{densidad } \rho} \right] &= \left[\frac{\text{longitud}^2}{\text{tiempo}^2} \right] \\ \therefore \rho &= \frac{\tau}{v^2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

de este modo la ecuación del Lagrangiano se vuelve

$$L = \int dx \tau \left[\frac{1}{2} \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.85)$$

Luego tomando el caso especial $v = c$

$$L = \int dx \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2] \quad (2.86)$$

Aquí se ha identificado el Lagrangiano como un invariante de Lorentz, por lo que se hace válido el análisis sobre el prototipo que se estaba haciendo para el caso más general que es la ecuación de onda, razón por la cual se ha prescindido de la cantidad τ , es decir, desde esta perspectiva los desplazamientos horizontales de los puntos rojos ahora son oscilaciones en la amplitud de una onda (Garcia,).

Usando notación relativista se tiene

$$L = \int dx \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial^0 \phi - \partial_1 \phi \partial^1 \phi] \quad (2.87)$$

Donde se ha cambiado la parcial con respecto a t por la parcial con respecto al índice 0, lo mismo con parcial con respecto a x que se ha llevado a su forma de parcial con respecto al índice 1. Luego de compactar con notación de Einstein queda,

$$L = \int dx \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (2.88)$$

El término dentro de la integral se trata de la densidad Lagrangiana para un campo escalar sin masa. Se ha obtenido a partir del prototipo de un campo escalar y abusando de la comparación con la ecuación de onda. La ecuación

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (2.89)$$

es la ecuación de Klein-Gordon para el caso particular de un campo escalar libre de masa (Soper, 2008).

Esta ecuación como ya se mencionó es invariante bajo transformaciones de Lorentz, lo que significa que lo que existe con una forma y dimensiones en cualquier marco de referencia inercial, es de la misma forma y dimensiones en cualquier otro marco de referencia.

Tomamos las transformaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0} \right)^2 &= \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^{0'}} - \beta \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right)^2 &= \left(-\beta \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^{0'}} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^{1'}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.90)$$

que son las transformaciones de Lorentz aplicadas a las derivadas parciales del campo ϕ .

Restando las ecuaciones Ec. (2.90) llegamos a

$$\mathcal{L} = (1 - \beta^2) \gamma^2 [(\partial_{0'} \phi)^2 - (\partial_{1'} \phi)^2] \quad (2.91)$$

donde $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$, por lo que obtenemos que la ecuación Ec. (2.91) en el sistema de referencia primado es de la misma forma que la ecuación Ec. (2.89).

Para llegar a la ecuación de Klein-Gordon para campos materiales hay que expandir

la ecuación libre de masa, obtener el Hamiltoniano a partir de la densidad Lagrangiana que se obtiene en el paso previo y resolver para la incógnita de la energía.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \\ \mathcal{L} &= [(\partial_{0'} \phi)^2 - (\partial_{1'} \phi)^2] \\ \mathcal{L} &= [(\partial_{ct'} \phi)^2 - (\partial_{x'} \phi)^2]\end{aligned}\tag{2.92}$$

Hasta aquí lo único que se ha hecho es expandir la ecuación de Klein-Gordon y expresarla en coordenadas cartesianas. Esta última expresión recuerda mucho a la métrica del espacio de Minkowski, esto es, si hacemos las siguientes comparaciones.

$$\begin{aligned}\partial_t &\rightarrow dt \\ \partial_x &\rightarrow dx\end{aligned}\tag{2.93}$$

El Lagrangiano en física se utiliza como integrando en el funcional Acción.

$$S[\lambda] = \int L d\lambda\tag{2.94}$$

El funcional Acción se usa regularmente para sumar todos los valores que toma una función a lo largo de una trayectoria. Tiene la importante aplicación de ser la guía para calcular las geodésicas de un sistema físico. Las geodésicas son el camino más corto que sigue una partícula en un espacio-tiempo —el cual no es una recta—. La geodésica calculada por el medio que sea es siempre la misma, ya sea que esta se calcule usando teoría de campos o relatividad. Con base en este argumento se asume que el funcional Acción usando la métrica de Minkowski es proporcional a un funcional Acción sobre la ecuación de Klein-Gordon (Susskind and Friedman, 2019). Esto es,

$$\begin{aligned}S[x(t)] &= \alpha \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} \\ S[x(t)] &= \alpha \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^2}{dt^2}} c dt \\ S[x(t)] &= \alpha \int \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right\} c dt\end{aligned}\tag{2.95}$$

Donde se ha hecho una aproximación usando expansión en serie de Taylor en la última línea. Luego,

$$S[x(t)] = \int \left\{ c\alpha - \frac{\alpha v^2}{2c} + \dots \right\} dt \quad (2.96)$$

Aquí se puede preguntar por el caso de una partícula libre, en otras palabras, cuando no existe ningún potencial, el único término que aparece en el Lagrangiano es la energía cinética. Esto es nos lleva a comparar términos.

$$-\frac{\alpha v^2}{2c} = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \alpha = -mc \quad (2.97)$$

quedando

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int \left\{ -mc^2 + \frac{mv^2}{2} \right\} dt \\ S[x(t)] &= -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \end{aligned} \quad (2.98)$$

Siendo el integrando la densidad Lagrangiana en términos de funciones reales. A diferencia de la versión en términos del campo ϕ .

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.99)$$

En mecánica teórica se tiene el importante resultado de que el momento de un sistema físico tiene la siguiente relación con la métrica.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \quad (2.100)$$

Usando la densidad Lagrangiana (2.99) obtenemos el momento,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.101)$$

de donde se puede despejar v con la siguiente forma.

$$v = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 + m^2c^4}} \quad (2.102)$$

Luego usando la siguiente relación entre el Hamiltoniano y el Lagrangiano.

$$H = p\dot{x} - \mathcal{L}E \rightarrow i\frac{E}{\hbar} \quad (2.103)$$

llegaremos a la siguiente ecuación.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E \quad (2.104)$$

Las ecuaciones del Hamiltoniano (2.104) y del momento (2.101) coinciden en la raíz, si las igualamos vemos que tenemos la siguiente relación.

$$\frac{mv}{p} = \frac{mc^2}{E} \quad (2.105)$$

de donde despejando v otra vez tenemos.

$$v = \frac{pc^2}{E} \quad (2.106)$$

Comparando las ecuaciones para v (2.102) y (2.106) vemos que

$$E = \sqrt{p^2c^2 + mc^4} \quad (2.107)$$

Esta importante ecuación nos dice que una partícula tiene energía por el simple hecho de tener masa.

Ahora se verá el efecto de considerar válida esta ecuación en teoría cuántica.

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p^2c^2 + mc^4} \\ E^2 - p^2c^2 - mc^4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

En teoría cuántica se ha identificado a la energía y el momento con los siguientes operadores,

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ p &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Así que la ecuación anterior queda como,

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - mc^2 = 0 \quad (2.110)$$

Esta ecuación se puede multiplicar por ϕ por ambos lados y traduciéndola a a notación relativista se llega a

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] = 0 \quad (2.111)$$

Cuyas solución general es

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\hat{a}_k u_k + \hat{a}_k^\dagger u_k^*) \quad (2.112)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon con masa, cuyas soluciones se dice que son las correspondientes a energías positivas y negativas en el sentido de que se corresponden a modos de frecuencia positivos y negativos. Además los coeficientes \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger resultan ser los operadores escalera en mecánica cuántica, solo que aquí serán estrictamente conocidos como operadores de creación y aniquilación (Schwartz, 2013; Garcia,).

2.4.1. Espinores

Un defecto que Dirac señaló en la ecuación de Klein-Gordon es que esta tiene un término en el tiempo de esta forma

$$\partial_0 \partial^0 \quad (2.113)$$

que es una segunda derivada en el tiempo, lo que causa que la ecuación de Klein-Gordon no se pueda interpretar como una corriente de probabilidad.

En mayor detalle, otras teorías como el electromagnetismo, la cuántica y la relatividad cuentan con ecuaciones que establecen que flujos de cargas, probabilidad o energía respectivamente son cantidades conservadas. Lo que implica que no hay creación y destrucción de ninguno de estos entes, sino que, más bien estos se transfieren de sistema a sistema. En la ecuación (2.114) ρ es una densidad de carga eléctrica o de probabilidad y $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ es una densidad de corriente de cargas eléctricas o de probabilidad respectivamente (García,).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.114)$$

A la luz de que $\partial_\mu \partial^\mu$ es una ecuación que vincula energía y momento como una sola sustancia se puede decir que,

$$E = p^0 c \quad (2.115)$$

la componente ∂_0 es en realidad la coordenada de momento 0 en el espacio-tiempo. Por tanto Dirac notó lo siguiente de la ecuación (2.108).

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ (p^0 c)^2 &= (p^1)^2 c^2 + m^2 c^4 \\ (p^0)^2 - (p^1)^2 &= m^2 c^2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

En este punto el truco consistió en que Dirac hizo uso del álgebra de Clifford, donde existen matrices γ^0 y γ^1 que cumplen

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= \mathbb{I} \\ (\gamma^1)^2 &= -\mathbb{I} \\ (\gamma^0)(\gamma^1) &= -(\gamma^1)(\gamma^0) \end{aligned} \quad (2.117)$$

El interés de Dirac en estas matrices radicó en que estas cumplen con el siguiente producto

$$(a\gamma^0 + b\gamma^1)(a\gamma^0 + b\gamma^1) = a^2 - b^2 \quad (2.118)$$

Las matrices γ^i se les conocerá como matrices de Dirac y a parte de las propiedades antes mencionadas también se cumple que las matrices de Dirac cumplen que

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^T &= \gamma^0 \\ (\gamma^1)^T &= -\gamma^1 \\ (\gamma^0)^2 &= (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = \mathbb{I} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Haciendo uso de esta álgebra, la ecuación ((2.116)) se puede expresar de la siguiente manera.

$$(\gamma^0 p^0 + \gamma^1 p^1 + mc)(\gamma^0 p^0 + \gamma^1 p^1 - mc) = 0 \quad (2.120)$$

Escogiendo el segundo término para que cumpla ser cero, llegamos a la ecuación de Dirac.

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc]\psi = 0 \quad (2.121)$$

donde se ha pasado a la función p a su forma de operador cuántico y como esta es una ecuación basada en matrices ψ es un vector, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon en la que se trataba solo de funciones escalares.

La ecuación de Dirac corresponde a un nuevo espacio de Hilbert conocido como el espacio interno. El espacio interno es un isomorfismo del espacio-tiempo de Minkowski con sus propias transformaciones de Lorentz, donde sus objetos matemáticos son matrices y como ya se mencionó, estos cumplen el álgebra de Clifford (Cartan, 1981).

Las soluciones de la ecuación de Dirac son espinores cuya forma es la siguiente

$$\begin{aligned}\psi^{(+)} &= (c_1 u_1 + c_2 u_2) e^{\frac{-ip_\mu x^\mu}{\hbar}} \\ \psi^{(-)} &= (c_3 v_1 + c_4 v_2) e^{\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}}\end{aligned}\tag{2.122}$$

donde $\psi^{(+)}$ y $\psi^{(-)}$ son soluciones a la ecuación de Dirac y son asociadas a la creación de pares partícula y antipartícula. Y como es bien sabido la suma de soluciones es también solución.

$$\psi^{(+)} = \sum_{r=1}^2 \left(c_r u_r e^{\frac{-ip_\mu x^\mu}{\hbar}} + d_r v_r e^{\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}} \right)\tag{2.123}$$

Los espinores son relevantes para la teoría de campos ya que a diferencia de los campos escalares, los espinores toman en cuenta el espín de las partículas fermiónicas.

2.4.2. Efecto Unruh

Se trata de una consecuencia de que todo sistema de referencia en el universo tiene su derecho propio a describir su marco como inercial y a eventualmente deducir todas las leyes de la física tal y como nosotros en nuestro marco de referencia las conocemos. Recordemos la isotropía y homogeneidad del universo que se deduce de que cualquier observador resolverá que la velocidad de la luz es de c . con esto lo que se intenta dar a entender, es que no hay una situación privilegiada en el universo a la cual anclarse y describir inequívocamente al resto de los marcos de referencia. Por esto, las transformaciones que se tienen que hacer para describir a los sistemas de referencia no inerciales vuelven las leyes de la física dependientes del observador.

En este sentido el efecto Unruh es un especie de efecto Doppler relativista que causa dependiendo de la dirección del observador un corrimiento de los estados cuánticos. Esto además está conectado con el “bremsstrahlung” y la emisión de radiación por parte de cargas eléctricas desaceleradas. Así, un observador acelerado montado sobre una partícula cargada verá que ésta no emite ninguna radiación, mientras que en el *LABFRAME* se verá la emisión de modos de frecuencia —estados cuánticos— con distribución de probabilidad

térmica (Crispino et al., 2008).

Cuando se habla de la generación de estados cuánticos se habla de la verdadera generación de partículas. Esto es normal en el formalismo de la teoría de los campos cuánticos ya que trata sobre el estudio de la física de altas energías, que trata precisamente de la generación de partículas.

Retomando los operadores \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger de la teoría de campos y viendo que en mecánica cuántica estos permiten obtener cualquier estado de un sistema con solo actuar de manera reiterada sobre algún estado del sistema,

$$\begin{aligned}\hat{a}_k |\hat{n}_k\rangle &= \sqrt{n} |(n-1)_k\rangle \\ \hat{a}_k^\dagger |\hat{n}_k\rangle &= \sqrt{n+1} |(n+1)_k\rangle\end{aligned}\tag{2.124}$$

Además los operadores \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger tienen otra gran propiedad que es que al multiplicarse forman un nuevo operador.

$$\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k\tag{2.125}$$

Este nuevo operador es conocido como el operador *número* el cual en el caso del oscilador armónico cuántico da el nivel de energía en el que se encuentra el sistema, pero para física de altas energías se corresponde con el número preciso de partículas en un sistema.

Con todo este cóctel de ideas resulta razonable el argumento de que al acelerarse una partícula en el espacio-tiempo de Minkowski no es posible definir unívocamente el concepto de partícula como un objeto inmutable. Ahora bien cuando un cúbit es acelerado, la forma de describirlo requiere de una transformación de coordenadas al espacio de Rindler

$$\begin{aligned}cT &= \text{angtgh} \left(\frac{ct}{x} \right) \\ r &= \sqrt{x^2 - (ct)^2}\end{aligned}\tag{2.126}$$

Sin embargo, esta transformación al tener dos soluciones, una para un tiempo positivo y otra para un tiempo negativo separa al espacio de Minkowski en dos regiones. Estas dos regiones tiene cada una de ellas parte de las soluciones para la ecuación de Klein-Gordon

y como se requiere que la base sea completa nos vemos obligados a hacer la suma sobre todas las soluciones, incluidas las de antipartícula. Esta situación plantea la dificultad de estudiar los comportamientos cuánticos relativistas usando la teoría de campos cuánticos. Ante tal situación el efecto Unruh nos dice como son las transformaciones de Bogoliubov entre los modos —cúbits— entre el espacio de Minkowski y el espacio de Rindler (Bruschi et al., 2010), esto es:

$$\begin{aligned}
 u_{\omega,M} &= \int_0^\infty (\alpha_{\omega\Omega R} u_{\Omega,R} + \alpha_{\omega\Omega L} u_{\Omega,L}) d\Omega \\
 u_{\Omega,R} &= \int_0^\infty (\alpha_{\omega\Omega R}^* u_{\omega,M}) d\omega \\
 u_{\Omega,L} &= \int_0^\infty (\alpha_{\omega\Omega L}^* u_{\omega,M}) d\omega
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\omega,\Omega}^R &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{\Omega \sinh(\pi\Omega)}{\pi}} \Gamma(-i\varepsilon\Omega) (\omega l_\Omega)^{i\varepsilon\Omega} \\
 \alpha_{\omega,\Omega}^L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{\Omega \sinh(\pi\Omega)}{\pi}} \Gamma(i\varepsilon\Omega) (\omega l_\Omega)^{-i\varepsilon\Omega}
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

estos términos α son las amplitudes de probabilidad por frecuencia que surgen de analizar la evolución en el tiempo de un sistema acoplado detector-campo donde un detector acelerado tiene una interacción con un estado de vacío (Asensio, 2019). En otras palabras, se puede asociar un modo de vacío con una colección de modos cuya distribución sea termal.

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{D,0} \otimes |0\rangle \langle 0| \tag{2.129}$$

La observación clave en este punto es que los modos de Minkowski $u_{\omega,M}$ y los modos de Unruh $u_{\Omega,L}$ y $u_{\Omega,R}$ están definidos en todo el espacio-tiempo, además de que no involucran la mezcla de modos y antimodos.

Como la definición de partícula en teoría de campos es dependiente del observador tenemos que el observador de Rindler puede definir sus propios modos en su marco de referencia. Es entonces cuando se puede hacer la conexión a estos modos por medio de los

modos de Unruh.

$$\begin{aligned} u_{\Omega,R} &= \cosh(r_\Omega)u_{\Omega,I} + \sinh(r_\Omega)u_{\Omega,II}^* \\ u_{\Omega,L} &= \sinh(r_\Omega)u_{\Omega,I}^* + \cosh(r_\Omega)u_{\Omega,II} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Comparando (2.127) y (2.130) vemos que un modo monocromático en la base de Rindler corresponde a una superposición no monocromática en la base de Minkowski.

Como no hay una transformación Lorentziana que nos lleve de Rindler a Minkowski se opta por hallar una relación entre las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon para el espacio de Minkowski y las soluciones de Klein-Gordon desde la perspectiva del observador acelerado. A saber,

$$\begin{aligned} \phi_M &= \int (a_{\omega,M}u_{\omega,M} + a_{\omega,M}^\dagger u_{\omega,M}^*)d\omega \\ \phi_U &= \int (A_{\Omega,R}u_{\Omega,R} + A_{\Omega,R}^\dagger u_{\Omega,R}^* + A_{\Omega,L}u_{\Omega,L} + A_{\Omega,L}^\dagger u_{\Omega,L}^*)d\omega \\ \phi_R &= \int (a_{\Omega,I}u_{\Omega,I} + a_{\Omega,I}^\dagger u_{\Omega,I}^* + a_{\Omega,II}u_{\Omega,II} + a_{\Omega,II}^\dagger u_{\Omega,II}^*)d\omega \end{aligned} \quad (2.131)$$

Así mismo, hay relaciones para los operadores de creación y aniquilación.

$$\begin{aligned} a_{\omega,M} &= \int_0^\infty [(\alpha_{\omega\Omega}^R)^* A_{\Omega,R} + (\alpha_{\omega\Omega}^L)^* A_{\Omega,L}]d\Omega \\ A_{\Omega,R} &= \int_0^\infty \alpha_{\omega\Omega}^R a_{\omega,M}d\omega \\ A_{\Omega,L} &= \int_0^\infty \alpha_{\omega\Omega}^L a_{\omega,M}d\omega \end{aligned} \quad (2.132)$$

con la relación entre los operadores de Unruh y Rindler,

$$\begin{aligned} a_{\Omega,I} &= \cosh(r_\Omega)A_{\Omega,R} + \sinh(r_\Omega)A_{\Omega,L}^\dagger \\ a_{\Omega,II} &= \cosh(r_\Omega)A_{\Omega,L} + \sinh(r_\Omega)A_{\Omega,R}^\dagger \end{aligned} \quad (2.133)$$

Todas estas relaciones nos brindan una manera de investigar como se relacionan los estados de vacío y excitados entre las diferentes bases. En particular, el interés en este trabajo radica en saber que le pasa a un cúbit en un marco de referencia no inercial, esto es, ya que las bases de Unruh y Minkowski están definidas en todo el espacio-tiempo y ya

que estas no mezclan operadores de creación y aniquilación concluimos que comparten el mismo estado de vacío. Siendo este

$$|0\rangle_M = |0\rangle_U = \prod_{\Omega} |0_{\Omega}\rangle_U \quad (2.134)$$

En efecto, un cúbit en base de Unruh se expande a una multitud de estados, lo cual no es ningún problema pues la probabilidad de obtener alguno de los modos esta dada por la ecuación del detector inercial.

$$A_{\omega,ine} = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \delta(\Omega + \omega\gamma(1 - v)) \quad (2.135)$$

Esta fórmula sale del uso del modelo para un detector de partículas Unruh-DeWitt. Esta es una aproximación teórica que ha servido mucho para el estudio de los campos cuánticos. Por medio de esta fórmula es que se sabe que para cúbits inerciales la probabilidad de detectar estados diferentes al cúbit original es cero (Socolovsky, 2013). Por otra parte, en términos del espacio de Rindler,

$$|0_{\Omega}\rangle_U = \sum_n f_{\Omega}(n) |n_{\Omega}\rangle_I |n_{\Omega}\rangle_{II} \quad (2.136)$$

En este caso cada cúbit que no es inercial se expande a una superposición de estados con la base de un sistema bipartita (Fletcher and Toms, 2015). Esto es, para el caso del cúbit,

$$|0_{\Omega}\rangle_M = \cos(r) |0_{\Omega}\rangle_I |0_{\Omega}\rangle_{II} + \sin(r) |1_{\Omega}\rangle_I |1_{\Omega}\rangle_{II} \quad (2.137)$$

donde $\cos(r) = (e^{\frac{2\pi\Omega c}{a}} + 1)^{\frac{1}{2}}$.

La amplitud de probabilidad por frecuencia obtenida para el observador acelerado es distinta de cero y esta dada por,

$$A_{\omega,acc} = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi\omega}} a^{-1} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} \left(\frac{\omega}{a}\right)^{\frac{i\Omega}{a}} \Gamma\left(\frac{-i\Omega}{a}\right) \quad (2.138)$$

por lo que efectivamente, los operadores de creación actúan sobre los estados de vacío, creando un cúbit en la región II de Rindler (Crispino et al., 2008).

2.4.3. Aproximación de modo único

En el estudio del entrelazamiento en marcos de referencia no inerciales, el campo es considerado como un conjunto de modos de vacío, donde solo son válidos dos de estos, los cuales están entrelazados en un estado de dos modos, es decir, como el estado de Bell

$$|\Psi\rangle_M = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_\omega\rangle_M |0_{\omega'}\rangle_M + |1_\omega\rangle_M |1_{\omega'}\rangle_M) \quad (2.139)$$

donde la M está asociada al espacio de coordenadas de Minkowski y ω y ω' son indicativos de dos estados distintos de dos distintas frecuencias. Dos observadores inerciales, Alice y Bob, portan detectores monocromáticos sensibles a las ya mencionadas frecuencias, esto de manera respectiva. Ellos medirán máxima correlación entre sus cúbits, ya que el estado de Bell es máximamente entrelazado. En este escenario, se hace no inercial a Bob y se pregunta por efecto sobre el entrelazamiento de nuestro sistema. Para la descripción adecuada de la parte de Bob es necesario hacer un cambio de coordenadas a la base de Rindler. Como esta transformación expande los modos de Minkowski en un espectro de estados sobre las cuñas de Rindler, se recurre a la aproximación de modo único para simplificar los cálculos (Asensio, 2019).

De la discusión vista en la sección anterior partimos de que el estado dado por la ecuación (2.134) es un *squeezed state* (estado apretujado) de excitaciones de Rindler sobre el vacío de Rindler para cada Ω . Donde, Ω se supone muy estrecha, de tal modo que se hace la aproximación de decir que es un paquete de ondas muy monocromático. En seguida se requiere renormalizar los operadores de ascenso y descenso $a_{\Omega,I}$, $a_{\Omega,II}$, $a_{\Omega,I}^\dagger$ y $a_{\Omega,II}^\dagger$. Siguiendo las reglas de conmutación que todos los operadores deben cumplir en mecánica cuántica nos conducen a tomar:

$$[A_{\Omega,R}, A_{\Omega,R}^\dagger] = [A_{\Omega,L}, A_{\Omega,L}^\dagger] = 1 \quad [a_{\Omega,I}, a_{\Omega,I}^\dagger] = [a_{\Omega,II}, a_{\Omega,II}^\dagger] \quad (2.140)$$

con las conmutaciones entre operadores mezclados de R, L, I, II como desvanecientes. En esta idealización de las frecuencias Ω , la mayoría de los operadores de creación de frecuencias de Minkowski puramente positivas pueden ser descritas por medio de una combinación lineal los dos operadores de creación de Unruh, en la forma:

$$a_{\Omega,U}^\dagger = q_L A_{\Omega,L}^\dagger + q_R A_{\Omega,R}^\dagger \quad (2.141)$$

donde q_R y q_L son números complejos que cumplen la relación $|q_R|^2 + |q_L|^2 = 1$, y ajustando también la condición

$$[a_{\Omega,U}, a_{\Omega,U}^\dagger] = 1 \quad (2.142)$$

La aplicación de estos operadores de creación sobre los estados apretujados Eq. (2.134) produce

$$a_{\Omega,U}^\dagger |0_\Omega\rangle_U = \sum_{n=0}^{\infty} f_\Omega(n) \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh(r_\Omega)} |\Phi_\Omega^n\rangle \quad (2.143)$$

con $|\Phi_\Omega^n\rangle = q_L |n_\Omega\rangle_I |(n+1)_\Omega\rangle_{II} + q_R |(n+1)_\Omega\rangle_I |n_{II}\rangle_{II}$

donde, en los estudios en los que esta basado este trabajo se ha tomado a $q_L = 0$ y $q_R = 1$. Esta elección rompe la simetría entre las cuñas de Rindler.

La justificación para hacer uso de la aproximación de modo único es que la distribución

$$a_{\omega,M} = \int_0^\infty [(\alpha_{\omega,\Omega}^R)^* A_{\Omega,R} + (\alpha_{\omega,\Omega}^L)^* A_{\Omega,L}] d\Omega \quad (2.144)$$

es estrecha en Ω . El problema viene de que los términos (2.128), que vienen a ser una transformación entre los estados de Minkowski y Unruh, no son estrictamente estrechos en Ω . De este modo, cuando se habla del estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_\omega\rangle_M |0_\Omega\rangle_U + |1_\omega\rangle_M |1_\Omega\rangle_U) \quad (2.145)$$

donde, los estados correspondientes a Ω son estados de Unruh. Luego, en este caso se tiene presente que las frecuencias de Ω son iguales a las de Rindler.

Después de expresar los modos de Bob en la base de Rindler, por medio de usar los

operadores de creación de Unruh que se mostraron párrafos arriba, se llega a la expresión:

$$\rho_{AR}^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\tanh^n(r_\Omega)}{\cosh(r_\Omega)} \right] \left(\begin{array}{l} |0n\rangle \langle 0n| + \\ \frac{n+1}{\cosh^2(r_\Omega)} \left(|q_R|^2 |1(n+1)\rangle \langle 1(n+1)| + |q_L|^2 |1n\rangle \langle 1n| \right) + \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh(r_\Omega)} \left(|q_R| |1n+1\rangle \langle 0n| + |q_L| \tanh(r_\Omega) |1n\rangle \langle 0n+1| \right) + \\ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\cosh^2(r_\Omega)} q_R q_L^* \tanh(r_\Omega) |1(n+2)\rangle \langle 1n| + \text{conjugados} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{términos} \\ \text{Hermitianos} \\ \text{fuera de la} \\ \text{diagonal} \end{array} \right) \quad (2.146)$$

Esta expresión es lo que resulta de no hacer uso de la aproximación de modo único, por lo tanto es una expresión más general de la matriz de densidad de un estado de Bell en marcos de referencia no inerciales.

Se debe entender que los estados estrechos de Minkowski y Unruh que se están usando son una idealización, ya que deberían ser entendidos como paquetes de onda en un estrecho rango continuo de frecuencias. Sin embargo, a pesar de las aclaraciones, bajo ciertas condiciones, tales como considerar el paquete de ondas estrictamente Gaussiano, que la estadística de los operadores de creación tiene funciones de peso desparramadas (*smeared*) y que la frecuencia ω es tan estrecha como sea posible, entonces la aproximación de modo único efectivamente recupera los resultados obtenidos por todos los estudios previos del entrelazamiento en marcos de referencia no inercial en sistemas bipartita (Bruschi et al., 2010).

Capítulo 3

Desarrollo y metodología

En esta sección se comentará la metodología que será llevada a cabo para alcanzar los objetivos que se mencionan en el Capítulo 1. El tema propuesto está ubicado dentro de lo que se denomina ciencia básica, por lo que se recurre a la metodología de la investigación científica teórica. La investigación tiene como base trabajos previos sobre el estudio del entrelazamiento en sistemas tetrapartita tales como “Tetrapartite entanglement measures of W-class in noninertial frames” (Torres-Arenas et al., 2019) y “Tetrapartite entanglement measures of GHZ state with uniform acceleration” (Dong et al., 2019).

Se desarrolló una exhaustiva revisión del estado del arte y las bibliografía básica asociada a estos temas a fin de tener la capacidad de hacer las adecuaciones pertinentes para aplicar la metodología usada en sistemas de tres y cuatro cúbits en sistemas de cinco cúbits.

En esta investigación se proponen dos importantes sistemas pentapartita, uno máximamente entrelazado (estados $|GHZ\rangle$) y uno parcialmente entrelazado (estados $|W\rangle$) y se aplicaron las metodologías usadas en investigaciones previas donde se analizaron sistemas de tres y cuatro cúbits. A lo largo de la investigación se hacen la comparación de las medidas de entrelazamiento entre estos sistemas.

En ambos sistemas multipartita se modela un ensamble de cinco cúbits por medio de su matriz de densidad, la que es sometida a la transformación de coordenadas de Rindler. Esta estrategia permite analizar el sistema por partes, ya que se tiene que trazar sobre las regiones inaccesibles en el espacio de Rindler. Además el modelo permite describir

el entrelazamiento como una función de un parámetro r asociado a la velocidad de los observadores. De este modo es posible calcular el entrelazamiento para las distintas configuraciones de apareamiento de cúbits en marcos de referencia no inerciales por medio de las fórmulas de entrelazamiento; enredo 1-1, enredo 1-4, enredo 2-3, residual aritmético, residual geométrico y la entropía del sistema. Los resultados obtenidos son analizados para poder ser comparados con respecto a los ya obtenidos en sistemas de cuatro cúbits. Se presentan los resultados obtenidos.

3.1. Descripción de los experimentos de entrelazamiento en sistemas pentapartita en un marco de referencia no inercial

Un sistema pentapartita máximamente entrelazado $|GHZ\rangle$ es como se presenta a continuación.

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_A 0_B 0_C 0_D 0_E\rangle + |1_A 1_B 1_C 1_D 1_E\rangle \right) \quad (3.1)$$

donde $|0_A 0_B 0_C 0_D 0_E\rangle = |0_A\rangle \otimes |0_B\rangle \otimes |0_C\rangle \otimes |0_D\rangle \otimes |0_E\rangle$ y el estado $|1_A 1_B 1_C 1_D 1_E\rangle = |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle \otimes |1_C\rangle \otimes |1_D\rangle \otimes |1_E\rangle$.

Por otro lado, un sistema parcialmente entrelazado $|W\rangle$ está definido de la siguiente manera.

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(|0_A 0_B 0_C 0_D 1_E\rangle + |0_A 0_B 0_C 1_D 0_E\rangle + |0_A 0_B 1_C 0_D 0_E\rangle + |0_A 1_B 0_C 0_D 0_E\rangle + |1_A 0_B 0_C 0_D 0_E\rangle \right) \quad (3.2)$$

Los subíndices utilizados corresponden a cada uno de los cinco cúbits. Siendo común leer en la literatura que A es por ser la parte de Alice, B la parte de Bob, C la parte de Charlie, D la parte de David y E la parte de Elly (aclarar que no nos hemos olvidado de Eve, pero ella no es muy de fiar que digamos). Hacemos el abuso de referirnos indistintamente a cada una de las partes aquí indicadas a veces como cúbits, a veces como observadores y a veces como modos. También se estará llamando estados GHZ o W-class a los estados $|GHZ\rangle$ y

$|W\rangle$ respectivamente.

Los experimento consisten en que inicialmente las partes de un sistema dado comparten un estado entrelazado en un marco de referencia inercial, luego se acelera el cúbit E de modo que este pasa a ser no inercial. En seguida procedemos a describir el sistema con dos cúbits acelerados, digamos D y E y así con el resto de los cúbits de los sistemas multipartita.

Debido al efecto Unruh los modos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en el espacio de Minkowski se desdoblan en dos estados en el espacio de Rindler.

$$\begin{aligned} |0\rangle_M &= \cos(r) |0\rangle_I |0\rangle_{II} + \sin(r) |1\rangle_I |1\rangle_{II} \\ |1\rangle_M &= |1\rangle_I |0\rangle_{II} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $|0\rangle_I$, $|0\rangle_{II}$, $|1\rangle_I$ y $|1\rangle_{II}$ son la descomposición de $|0\rangle_M$ y $|1\rangle_M$ respectivamente en dos regiones casualmente desconectadas I y II en el espacio de Rindler (Fuentes-Schuller and Mann, 2005; Alsing and Fuentes, 2012).

El parámetro r está asociado a la velocidad del observador en espacio de Rindler que varia de $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Por lo que, $r = 0$ significa que el observador es inercial con respecto a otros observadores, por otro lado $r = \frac{\pi}{4}$ se corresponde con la velocidad de la luz c . Además $r = r(\omega, a)$, explícitamente $\cos(r) = \left(1 + e^{\frac{-2\pi\omega c}{a}}\right)$ que de la teoría de campos se dice cada partícula entrelazada se modela como un campo de Dirac de frecuencia ω con aceleración a , pero por simplicidad en esta investigación solo se consideran el modo $\omega_{A,B,C,D,E} = \omega$ con una aceleración uniforme $a_{A,B,C,D,E} = a$.

3.1.1. Matrices de densidad de los sistemas pentapartita no inerciales

Un estado $|GHZ\rangle$ se expande en las coordenadas de Rindler cuando uno o varios cúbits son acelerados. Se muestra dicha transformación en la siguiente línea.

$$\begin{aligned}
 |GHZ\rangle_{ABCDE_1E_{II}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(r) |0_A0_B0_C0_D0_{E_I}0_{E_{II}}\rangle + \right. \\
 &\quad + \sin(r) |0_A0_B0_C0_D1_{E_I}1_{E_{II}}\rangle + \\
 &\quad \left. + |1_A1_B1_C1_D1_{E_I}0_{E_{II}}\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como podemos apreciar este nuevo estado en realidad describe a seis partículas, son los estados de partícula y antipartícula de las regiones II y III de Rindler. Además el número de posibles configuraciones del vector de estado también creció como efecto de la transformación. Los vectores de estado para cuando dos, tres cuatro y todos los cúbits son no inerciales se dan a continuación.

$$\begin{aligned}
 |GHZ\rangle_{ABCD_1D_{II}E_1E_{II}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(r) \sin(r) |0_A0_B0_C0_{D_I}0_{D_{II}}1_{E_I}1_{E_{II}}\rangle + \right. \\
 &= \cos(r) \cos(r) |0_A0_B0_C0_{D_I}0_{D_{II}}0_{E_I}0_{E_{II}}\rangle + \\
 &= \sin(r) |0_A0_B0_C1_{D_I}1_{D_{II}}0_{E_I}0_{E_{II}}\rangle + \\
 &= \sin^2(r) |0_A0_B0_C1_{D_I}1_{D_{II}}1_{E_I}1_{E_{II}}\rangle + \\
 &\quad \left. + |1_A1_B1_C1_{D_I}0_{D_{II}}1_{E_I}0_{E_{II}}\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
|\text{GHZ}\rangle_{ABC_1C_{II}D_1D_{II}E_1E_{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(& \cos^3(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle & (3.6) \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + |1_A1_B1_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle \left. \right)
\end{aligned}$$

De aquí en adelante se sustituyen los índices I y II por 1 y 2 respectivamente.

$$\begin{aligned}
|GHZ\rangle_{AB_1B_{II}C_1C_{II}D_1D_{II}E_1E_{II}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^4(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \right. \\
&+ \sin(r) \cos^3(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin(r) \cos^3(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin(r) \cos^3(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin(r) \cos^3(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^2(r) \cos^2(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^3(r) \cos(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^3(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^3(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^3(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
&+ \sin^4(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
&+ |1_A 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle \left. \right) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|GHZ\rangle_{A_I A_{II} B_I B_{II} C_I C_{II} D_I D_{II} E_I E_{II}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^5(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \right. \\
& + \sin(r) \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^4(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle +
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^4(r) \cos(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^5(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle
\end{aligned}$$

Los estados W-class también se expanden al hacer las transformadas al espacio de coordenadas de Rindler. En adelante presentamos las funciones de estado correspondientes a uno, dos, tres, cuatro y todos los cúbits acelerados.

$$\begin{aligned}
|W_{ABCDE_1E_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\right. & \sin(r) |0_A 0_B 0_C 1_D 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) |0_A 0_B 1_C 0_D 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) |0_A 1_B 0_C 0_D 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) |1_A 0_B 0_C 0_D 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |0_A 0_B 0_C 1_D 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |0_A 0_B 1_C 0_D 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |0_A 1_B 0_C 0_D 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |1_A 0_B 0_C 0_D 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& \left. + |0_A 0_B 0_C 0_D 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
|W_{ABCD_1D_2E_1E_2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sin^2(r) |0_A0_B1_C1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \right. \\
& + \sin^2(r) |0_A1_B0_C1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) |1_A0_B0_C1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) |0_A0_B0_C1_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) |0_A0_B0_C1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |0_A0_B1_C0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |0_A1_B0_C0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |1_A0_B0_C0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |0_A0_B0_C0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos(r) |0_A0_B0_C1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_C0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_C1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A1_B0_C0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A1_B0_C1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |1_A0_B0_C0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& \left. + \sin(r) \cos(r) |1_A0_B0_C1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
|W_{ABC_1C_2D_1D_2E_1E_2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos^3(r) |0_A1_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \right. \\
& + \cos^3(r) |1_A0_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^2(r) |0_A0_B1_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |1_A0_B0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |1_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |1_A0_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A1_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A1_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A1_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |1_A0_B0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |1_A0_B1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |1_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) |0_A0_B1_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) |0_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A1_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& \left. + \sin^3(r) |1_A0_B1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
|W_{AB_1B_2C_1C_2D_1D_2E_1E_2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos^4(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \right. \\
& + \cos^3(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^3(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^3(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^3(r) |0_A1_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_A1_{B_1}1_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}1_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}1_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^2(r) |0_A1_{B_1}1_{B_2}1_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A0_{B_1}0_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A1_{B_1}1_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}1_{E_1}1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A1_{B_1}1_{B_2}0_{C_1}0_{C_2}1_{D_1}1_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_A1_{B_1}1_{B_2}1_{C_1}1_{C_2}0_{D_1}0_{D_2}0_{E_1}0_{E_2}\rangle +
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_A 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_A 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) |0_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_A 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|W_{A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 D_1 D_2 E_1 E_2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \right. \\
& + \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^4(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \cos^4(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin(r) \cos^3(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle +
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2(r) \cos^2(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |0_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 0_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 0_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 0_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^3(r) \cos(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 0_{E_1} 0_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_{A_1} 0_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 0_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 0_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 0_{D_2} 1_{E_1} 1_{E_2}\rangle + \\
& + \sin^4(r) |1_{A_1} 1_{A_2} 1_{B_1} 1_{B_2} 1_{C_1} 1_{C_2} 1_{D_1} 1_{D_2} 1_{E_1} 0_{E_2}\rangle \Big)
\end{aligned}$$

La principal observación que se puede hacer tras expandir todos los sistemas pentapartita es que el número de configuraciones en los vectores de estado crecen exponencialmente como función de 2^x , en los casos GHZ como $x_i + 2^{x_i-1}$ y en los casos W-class como $2x_i - 2^{x_i-1}$.

3.1.2. Estados accesibles de un sistema pentapartita

Debido a las transformaciones de Rindler las matrices de densidad se expanden en estados de partícula y antipartícula en las regiones II y III, pero la cuña de Rindler III se dice que es inaccesible casualísticamente, por lo que se traza sobre las partes de las matrices de densidad correspondientes mediante la operación «traza parcial», esto se logra mediante la siguiente operación sobre cada una de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita:

$$Tr_A\{\rho_{AB}\} = \sum_i (\langle i| \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB} (|i\rangle \otimes \mathbb{I}_B) \quad (3.14)$$

Por ejemplo, al trazar sobre el cúbit E_2 de la matriz de densidad $\rho_{ABCDE_1E_{II}}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_{ABCDE_1} = \frac{1}{2} \left(\cos^2(r) |0_A 0_B 0_C 0_D 0_{E_1}\rangle \langle 0_A 0_B 0_C 0_D 0_{E_1}| + \right. \\ + \cos(r) |0_A 0_B 0_C 0_D 0_{E_1}\rangle \langle 1_A 1_B 1_C 1_D 1_{E_1}| + \\ + \sin^2(r) |0_A 0_B 0_C 0_D 1_{E_1}\rangle \langle 0_A 0_B 0_C 0_D 1_{E_1}| + \\ + \cos(r) |0_A 0_B 0_C 0_D 0_{E_1}\rangle \langle 1_A 1_B 1_C 1_D 1_{E_1}| + \\ \left. + |1_A 1_B 1_C 1_D 1_{E_1}\rangle \langle 1_A 1_B 1_C 1_D 1_{E_1}| \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

En vez de escribir las matrices correspondientes se ponen solo las entradas $[i, j]$ no nulas de las matrices de densidad en las siguientes tablas.

Tabla 3.1: Entradas no nulas of ρ_{ABCDE_1}

Matriz de densidad	Entradas no nulas
ρ_{ABCDE_1}	$[1, 1] = \frac{\cos^2(r)}{2}$
	$[32, 1] = [1, 32] = \frac{\cos(r)}{2}$
	$[2, 2] = \frac{\sin^2(r)}{2}$
	$[32, 32] = \frac{1}{2}$

Tabla 3.2: Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales

Matriz de densidad	Entradas no nulas
$\rho_{ABCD_1E_1}$	$[1, 1] = \frac{\cos^4(r)}{2}$ $[32, 1] = [1, 32] = \frac{\cos^2(r)}{2}$ $[2, 2] = [3, 3] = \frac{\sin^2(2r)}{8}$ $[4, 4] = \frac{\sin^4(r)}{2}$ $[32, 32] = \frac{1}{2}$
$\rho_{ABC_1D_1E_1}$	$[1, 1] = \frac{\cos^6(r)}{2}$ $[1, 32] = [32, 1] = \frac{\cos^3(r)}{2}$ $[2, 2] = [3, 3] = [5, 5] = \frac{\cos^4(r)\sin^2(r)}{2}$ $[4, 4] = [6, 6] = [7, 7] = \frac{\cos^2(r)\sin^4(r)}{2}$ $[8, 8] = \frac{\sin^6(r)}{2}$ $[32, 32] = \frac{1}{2}$
$\rho_{AB_1C_1D_1E_1}$	$[1, 1] = \frac{\cos^8(r)}{2}$ $[1, 32] = [32, 1] = \frac{\cos^4(r)}{2}$ $[2, 2] = [3, 3] = [5, 5] = [9, 9] = \frac{\cos^6(r)\sin^2(r)}{2}$ $[4, 4] = [6, 6] = [7, 7] = [10, 10] = [11, 11] = [13, 13] = \frac{\sin^4(2r)}{32}$ $[8, 8] = [12, 12] = [14, 14] = [15, 15] = \frac{\cos^2(r)\sin^6(r)}{2}$ $[16, 16] = \frac{\sin^8(r)}{2}$ $[32, 32] = \frac{1}{2}$
$\rho_{A_1B_1C_1D_1E_1}$	$[1, 1] = \frac{\cos^{10}(r)}{2}$ $[1, 32] = [32, 1] = \frac{\cos^5(r)}{2}$ $[2, 2] = [3, 3] = [5, 5] = [9, 9] = [17, 17] = \frac{\cos^8(r)\sin^2(r)}{2}$ $[13, 13] = [4, 4] = [19, 19] = [10, 10] = [11, 11] = [6, 6] = [18, 18] =$ $[21, 21] = [25, 25] = [7, 7] = \frac{\cos^6(r)\sin^4(r)}{2}$ $[8, 8] = [12, 12] = [14, 14] = [15, 15] = [20, 20] = [22, 22] =$ $[23, 23] = [26, 26] = [27, 27] = [29, 29] = \frac{\cos^4(r)\sin^6(r)}{2}$ $[16, 16] = [24, 24] = [28, 28] = [30, 30] = [31, 31] = \frac{\cos^2(r)\sin^8(r)}{2}$ $[32, 32] = \frac{1}{2} + \frac{\sin^{10}(r)}{2}$

A continuación se presentan los elementos $[i, j]$ no nulos de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita correspondientes a los estados W -class, esto luego de haber trazado sobre la región inaccesible.

Tabla 3.3: Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales

Matriz de densidad	Entradas no nulas
ρ_{ABCDE_1}	$[2, 2] = \frac{1}{5}$ $[2, 3] = [2, 5] = [2, 9] = [2, 17] = [3, 2] = [5, 2] = [9, 2] = [17, 2] = \frac{\cos(r)}{5}$ $[3, 3] = [3, 5] = [3, 9] = [3, 17] = [5, 3] = [5, 5] = [5, 9] = [5, 17] = [9, 3] = [9, 5] = [9, 9] = [9, 17] = [17, 3] = [17, 5] = [17, 9] = [17, 17] = \frac{\cos^2(r)}{5}$ $[4, 4], [4, 6] = [4, 10] = [4, 18] = [6, 4] = [6, 6] = [6, 10] = [6, 18] = [10, 4] = [10, 6] = [10, 10] = [10, 18] = [18, 4] = [18, 6] = [18, 10] = [18, 18] = \frac{\sin^2(r)}{5}$
$\rho_{ABCD_1E_1}$	$[2, 2] = [2, 3] = [3, 2] = [3, 3] = \frac{\cos^2(r)}{5}$ $[2, 5] = [2, 9] = [2, 17] = [3, 5] = [3, 9] = [3, 17] = [5, 2] = [5, 3] = [9, 2] = [9, 3] = [17, 2] = [17, 3] = \frac{\cos^3(r)}{5}$ $[4, 4] = \frac{2\sin^2(r)}{5}$ $[4, 6] = [4, 7] = [4, 10] = [4, 11] = [4, 18] = [4, 19] = [6, 4] = [7, 4] = [10, 4] = [11, 4] = [18, 4] = [19, 4] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos(r)$ $[5, 5] = [5, 9] = [5, 17] = [9, 5] = [9, 9] = [9, 17] = [17, 5] = [17, 9] = [17, 17] = \frac{\cos^4(r)}{5}$ $[6, 6], [6, 10] = [6, 18] = [7, 7] = [7, 11] = [7, 19] = [10, 6] = [10, 10] = [10, 18] = [11, 7] = [11, 11] = [11, 19] = [18, 6] = [18, 10] = [18, 18] = [19, 7] = [19, 11] = [19, 19] = \frac{1}{20} \sin^2(2r)$ $[8, 8] = [8, 12] = [8, 20] = [12, 8] = [12, 12] = [12, 20] = [20, 8] = [20, 12] = [20, 20] = \frac{\sin^4(r)}{5}$

Tabla 3.4: Entradas no nulas de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales

Matriz de densidad	Entradas no nulas
$\rho_{ABC_1D_1E_1}$	$[2, 2] = [2, 3] = [2, 5] = [3, 2] = [3, 3] = [3, 5] = [5, 2] = [5, 3] = [5, 5] = \frac{\cos^4(r)}{5}$
	$[2, 9] = [2, 17] = [3, 9] = [3, 17] = [5, 9] = [5, 17] = [9, 2] = [9, 3] = [9, 5] = [17, 2] = [17, 3] = [17, 5] = \frac{\cos^5(r)}{5}$
	$[4, 4] = [6, 6] = [7, 7] = \frac{1}{10} \sin^2(2r)$
	$[4, 6] = [4, 7] = [6, 4] = [6, 7] = [7, 4] = [7, 6] = \frac{1}{20} \sin^2(2r)$
	$[4, 10] = [4, 11] = [4, 18] = [4, 19] = [6, 10] = [6, 13] = [6, 18] = [6, 21] = [7, 11] = [7, 13] = [7, 19] = [7, 21] = [10, 4] = [10, 6] = [11, 4] = [11, 7] = [13, 6] = [13, 7] = [18, 4] = [18, 6] = [19, 4] = [19, 7] = [21, 6] = [21, 7] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^3(r)$
	$[8, 8] = \frac{3 \sin^4(r)}{5}$
	$[8, 12], [8, 14] = [8, 15] = [8, 20] = [8, 22] = [8, 23] = [12, 8] = [14, 8] = [15, 8] = [20, 8] = [22, 8] = [23, 8] = \frac{1}{5} \sin^4(r) \cos(r)$
	$[9, 9] = [9, 17] = [17, 9] = [17, 17] = \frac{\cos^6(r)}{5}$
	$[10, 10], [10, 18] = [11, 11] = [11, 19] = [13, 13] = [13, 21] = [18, 10] = [18, 18] = [19, 11] = [19, 19] = [21, 13] = [21, 21] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^4(r)$
	$[12, 12] = [12, 20] = [14, 14] = [14, 22] = [15, 15] = [15, 23] = [20, 12] = [20, 20] = [22, 14] = [22, 22] = [23, 15] = [23, 23] = 1/5 \cos[r]^2 \sin[r]^4$
	$[16, 16] = [16, 24] = [24, 16] = [24, 24] = \frac{\sin^6(r)}{5}$

Matriz de densidad	Entradas no nulas
	$[2, 2] = [2, 3] = [2, 5] = [2, 9] = [3, 2] = [3, 3] = [3, 5] = [3, 9] =$
	$[5, 2] = [5, 3] = [5, 5] = [5, 9] = [9, 2] = [9, 3] = [9, 5] = [9, 9] =$
	$\frac{\cos^6(r)}{5}$
	$[2, 17] = [3, 17] = [5, 17] = [9, 17] = [17, 2] = [17, 3] = [17, 5] =$
	$[17, 9] = \frac{\cos^7(r)}{5}$
	$[4, 4] = [6, 6] = [7, 7] = [10, 10] = [11, 11] = [13, 13] =$
	$\frac{2}{5} \sin^2(r) \cos^4(r)$
	$[4, 6] = [4, 7] = [4, 10] = [4, 11] = [6, 4] = [6, 7] = [6, 10] = [6, 13] =$
	$[7, 4] = [7, 6] = [7, 11] = [7, 13] = [10, 4] = [10, 6] = [10, 11] =$
	$[10, 13] = [11, 4] = [11, 7] = [11, 10] = [11, 13] = [13, 6] = [13, 7] =$
	$[13, 10] = [13, 11] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^4(r)$
	$[4, 18] = [4, 19] = [6, 18] = [6, 21] = [7, 19] = [7, 21] = [10, 18] =$
	$[10, 25] = [11, 19] = [11, 25] = [13, 21] = [13, 25] = [18, 4] =$
	$[18, 6] = [18, 10] = [19, 4] = [19, 7] = [19, 11] = [21, 6] = [21, 7] =$
	$[21, 13] = [25, 10] = [25, 11] = [25, 13] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^5(r)$
	$[8, 8] = [12, 12] = [14, 14] = [15, 15] = \frac{3}{5} \sin^4(r) \cos^2(r)$
	$[8, 12] = [8, 14] = [8, 15] = [12, 8] = [12, 14] = [12, 15] = [14, 8] =$
	$[14, 12] = [14, 15] = [15, 8] = [15, 12] = [15, 14] = \frac{1}{5} \sin^4(r) \cos^2(r)$
	$[8, 20] = [8, 22] = [8, 23] = [12, 20] = [12, 26] = [12, 27] = [14, 22] =$
	$[14, 26] = [14, 29] = [15, 23] = [15, 27] = [15, 29] = [20, 8] =$
	$[20, 12] = [22, 8] = [22, 14] = [23, 8] = [23, 15] = [26, 12] =$
	$[26, 14] = [27, 12] = [27, 15] = [29, 14] = [29, 15] = \frac{1}{5} \sin^4(r) \cos^3(r)$
	$[16, 16] = \frac{4 \sin^6(r)}{5}$
	$[16, 24] = [16, 28] = [16, 30] = [16, 31] = [24, 16] = [28, 16] =$
	$[30, 16] = [31, 16] = \frac{1}{5} \sin^6(r) \cos(r)$
	$[17, 17] = \frac{\cos^8(r)}{5}$
	$[18, 18] = [19, 19] = [21, 21] = [25, 25] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^6(r)$
	$[20, 20] = [22, 22] = [23, 23] = [26, 26] = [27, 27] = [29, 29] =$
	$\frac{1}{80} \sin^4(2r)$
	$[24, 24] = [28, 28] = [30, 30] = [31, 31] = \frac{1}{5} \sin^6(r) \cos^2(r)$
	$[32, 32] = \frac{\sin^8(r)}{5}$

Matriz de densidad

Entradas no nulas

 $\rho_{A_1 B_1 C_1 D_1 E_1}$

$$\begin{aligned}
& [2, 2] = [2, 3] = [2, 5] = [2, 9] = [2, 17] = [3, 2] = [3, 3] = [3, 5] = [3, 9] = [3, 17] = \\
& [5, 2] = [5, 3] = [5, 5] = [5, 9] = [5, 17] = [9, 2] = [9, 3] = [9, 5] = [9, 9] = [9, 17] = \\
& [17, 2] = [17, 3] = [17, 5] = [17, 9] = [17, 17] = \frac{\cos^8(r)}{5} \\
& [4, 4] = [6, 6] = [7, 7] = [10, 10] = [11, 11] = [13, 13] = [18, 18] = \\
& [19, 19] = [21, 21] = [25, 25] = \frac{2}{5} \sin^2(r) \cos^6(r) \\
& [4, 6] = [4, 7] = [4, 10] = [4, 11] = [4, 18] = [4, 19] = [6, 4] = [6, 7] = \\
& [6, 10] = [6, 13] = [6, 18] = [6, 21] = [7, 4] = [7, 6] = [7, 11] = [7, 13] = \\
& [7, 19] = [7, 21] = [10, 4] = [10, 6] = [10, 11] = [10, 13] = [10, 18] = \\
& [10, 25] = [11, 4] = [11, 7] = [11, 10] = [11, 13] = [11, 19] = [11, 25] = \\
& [13, 6] = [13, 7] = [13, 10] = [13, 11] = [13, 21] = [13, 25] = [18, 4] = \\
& [18, 6] = [18, 10] = [18, 19] = [18, 21] = [18, 25] = [19, 4] = [19, 7] = \\
& [19, 11] = [19, 18] = [19, 21] = [19, 25] = [21, 6] = [21, 7] = [21, 13] = \\
& [21, 18] = [21, 19] = [21, 25] = [25, 10] = [25, 11] = [25, 13] = [25, 18] = \\
& [25, 19] = [25, 21] = \frac{1}{5} \sin^2(r) \cos^6(r) \\
& [8, 8], [12, 12] = [14, 14] = [15, 15] = [20, 20] = [22, 22] = [23, 23] = \\
& [26, 26] = [27, 27] = [29, 29] = \frac{3}{80} \sin^4(2r) \\
& [8, 12] = [8, 14] = [8, 15] = [8, 20] = [8, 22] = [8, 23] = [12, 8] = [12, 14] = \\
& [12, 15] = [12, 20] = [12, 26] = [12, 27] = [14, 8] = [14, 12] = [14, 15] = \\
& [14, 22] = [14, 26] = [14, 29] = [15, 8] = [15, 12] = [15, 14] = [15, 23] = \\
& [15, 27] = [15, 29] = [20, 8] = [20, 12] = [20, 22] = [20, 23] = [20, 26] = \\
& [20, 27] = [22, 8] = [22, 14] = [22, 20] = [22, 23] = [22, 26] = [22, 29] = \\
& [23, 8] = [23, 15] = [23, 20] = [23, 22] = [23, 27] = [23, 29] = [26, 12] = \\
& [26, 14] = [26, 20] = [26, 22] = [26, 27] = [26, 29] = [27, 12] = [27, 15] = \\
& [27, 20] = [27, 23] = [27, 26] = [27, 29] = [29, 14] = [29, 15] = [29, 22] = \\
& [29, 23] = [29, 26] = [29, 27] = \frac{1}{80} \sin^4(2r) \\
& [16, 16] = [24, 24] = [28, 28] = [30, 30] = [31, 31] = \frac{4}{5} \sin^6(r) \cos^2(r) \\
& [16, 24] = [16, 28] = [16, 30] = [16, 31] = [24, 16] = [24, 28] = \\
& [24, 30] = [24, 31] = [28, 16] = [28, 24] = [28, 30] = [28, 31] = [30, 16] = \\
& [30, 24] = [30, 28] = [30, 31] = [31, 16] = [31, 24] = [31, 28] = [31, 30] = \\
& \frac{1}{5} \sin^6(r) \cos^2(r) \\
& [32, 32] = \sin^8(r)
\end{aligned}$$

3.2. Medidas de Entrelazamiento Multipartita

3.2.1. Negatividad

Haciendo uso del software de MATHEMATICA se realizaron la mayoría de los cálculos de manera simbólica. En el caso de los sistemas GHZ se obtuvieron expresiones relativamente simples. Pero para el caso de los sistemas W-class estas expresiones fueron muy complicadas. Además hay que mencionar que para ciertos casos donde el número de configuraciones de los vectores de estado era mayor, el software tardó bastante o no podía calcular los eigenvalores. Esto se puede evitar si se desarrollan numéricamente todos los cálculos, esto se logra tras evaluar las matrices de densidad sobre una partición de valores de r convenientemente densa según el poder de cómputo con el que se cuente, en esta investigación se usó una partición $r \in [0, \pi/40, 2\pi/40, 3\pi/40, 4\pi/40, 5\pi/40, 6\pi/40, 7\pi/40, 8\pi/40, 9\pi/40, \pi/4]$ para poder reproducir las gráficas que se obtuvieron analíticamente.

En adelante se exponen las expresiones analíticas de los enredos 1-4.

3.2.2. Expresiones analíticas de los enredos 1-4 en sistemas pentapartita GHZ

Enredos 1-4 de los sistemas GHZ.

Negatividad de los enredos 1-4 con un observador acelerado

$$N_{E_1,ABCD} = \cos^2(r)$$

$$N_{D,ABCE_1} = N_{D,ABCE_1} = N_{C,ABDE_1} = N_{B,ACDE_1} = N_{A,BCDE_1} = \cos(r)$$

Negatividad de los enredos 1-4 con dos observadores acelerados

$$N_{E_1,ABCD_1} = N_{D_1,ABCE_1} = \frac{1}{16} \left(2\sqrt{2}\sqrt{\cos^4(r)(-4\cos(2r) + \cos(4r) + 35)} + \cos(4r) - 1 \right)$$

$$N_{C,ABD_1E_1} = N_{B,ACD_1E_1} = N_{A,BCD_1E_1} = \cos^2(r)$$

Negatividad de los enredos 1-4 con tres observadores acelerados

$$N_{E_1,ABC_1D_1} = N_{D_1,ABC_1E_1} = N_{C_1,ABD_1E_1} = \frac{1}{64} \left(4\sqrt{2}\sqrt{\cos^6(r)(-\cos(2r) - 2\cos(4r) + \cos(6r) + 130)} - \cos(2r) + 2\cos(4r) + \cos(6r) - 2 \right)$$

$$N_{B,AC_1D_1E_1} = N_{A,BC_1D_1E_1} = \cos^3(r)$$

Negatividad de los enredos 1-4 con cuatro observadores acelerados

$$\begin{aligned} N_{E_1,AB_1C_1D_1} &= N_{D_1,AB_1C_1E_1} = N_{C_1,AB_1D_1E_1} = N_{B_1,AC_1D_1E_1} = \\ &\frac{1}{256} \left(8\sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(-4\cos(4r) + \cos(8r) + 515)} - 4\cos(2r) + 4\cos(4r) + 4\cos(6r) + \cos(8r) - 5 \right) \\ N_{A,B_1C_1D_1E_1} &= \\ &\frac{1}{256} \left(56\cos(2r) - 28\cos(4r) + 8\cos(6r) - \cos(8r) + \right. \\ &\left. \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{l} 45904\cos(2r) + 36680\cos(4r) + 3824\cos(6r) + \\ 2844\cos(8r) - 560\cos(10r) + 120\cos(12r) - \\ 16\cos(14r) + \cos(16r) + 42275 \end{array} \right)} - 35 \right) \end{aligned}$$

Negatividad de los enredos 1-4 con cinco observadores acelerados

$$\begin{aligned} N_{E_1,A_1B_1C_1D_1} &= N_{D_1,A_1B_1C_1E_1} = N_{C_1,A_1B_1D_1E_1} = N_{B_1,A_1C_1D_1E_1} = N_{A_1,B_1C_1D_1E_1} \\ &\frac{1}{256} \left(\sqrt{2} \left\{ \cos^4(r)(12532\cos(2r) + 8156\cos(4r) - 116\cos(6r) + 436\cos(8r) - 124\cos(10r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 36\cos(12r) - 4\cos(14r) + \cos(16r) + 11851) \right\}^{\frac{1}{2}} + 4\cos(4r) + 3\cos(8r) - 7 \right) \end{aligned}$$

3.2.3. Expresiones analíticas de los enredos 1-4 en sistemas pentapartita W-class

Negatividad de los enredos 1-4 con un observador acelerado

$$\begin{aligned} N_{E_I,ABCD} &= \frac{1}{5} \left(2\cos(2r) + \sqrt{2}\sqrt{\cos(4r) + 7} - 2 \right) \\ N_{D,ABCE_I} &= N_{C,ABDE_I} = N_{B,ACDE_I} = N_{A,BCDE_I} = \\ &= \frac{1}{5} (-2) \text{Root} \left[32\#1^3 + \#1^2(16\cos(2r) - 16) + \#1(-64\cos(2r) - 12\cos(4r) - 52) + \right. \\ &\quad \left. + 3\cos(2r) - 6\cos(4r) - 3\cos(6r) + 6\& , 1 \right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
N_{E_I,ABCD_I} = N_{D_I,ABCE_I} &= \frac{1}{10} \text{Root} \left[2\#1^3 + \#1^2(8 \cos(2r) + 3 \cos(4r) - 11) + \#1(-64 \cos(2r) + \right. \\
&\quad \left. -28 \cos(4r) - 36) + 12 \cos(2r) - 12 \cos(4r) - 12 \cos(6r) - 3 \cos(8r) + 15\&, 1 \right] \\
N_{C,ABD_I E_I} = N_{B,ACD_I E_I} = N_{A,BCD_I E_I} &= \frac{1}{10} \text{Root} \left[16\#1^3 + \#1^2(8 \cos(4r) - 8) + \right. \\
&\quad \left. + \#1(-464 \cos(2r) - 208 \cos(4r) - 48 \cos(6r) - 4 \cos(8r) - 300) + 48 \cos(2r) + \right. \\
&\quad \left. -15 \cos(4r) - 40 \cos(6r) - 26 \cos(8r) - 8 \cos(10r) - \cos(12r) + 42\&, 1 \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Negatividad de los enredos 1-4 con tres observadores acelerados

$$\begin{aligned}
N_{E_I,ABC_I D_I} = N_{D_I,ABC_I E_I} = N_{C_I,ABD_I E_I} &= \frac{1}{10} \left| \text{Root} \left[64\#1^3 + (-16 \cos(2r) + 128 \cos(4r) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +16 \cos(6r) - 128)\#1^2 + (-1728 \cos(2r) - 960 \cos(4r) - 320 \cos(6r) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -48 \cos(8r) - 1040)\#1 + 165 \cos(2r) - 22 \cos(4r) - 121 \cos(6r) - 100 \cos(8r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -43 \cos(10r) - 10 \cos(12r) - \cos(14r) + 132\&, 1 \right] \right| \\
N_{B,AC_I D_I E_I} = N_{A,BC_I D_I E_I} &= -\frac{1}{10} \text{Root} \left[2048\#1^3 + \#1^2(-256 \cos(2r) + 512 \cos(4r) + \right. \\
&\quad \left. +256 \cos(6r) - 512) + \#1(-52992 \cos(2r) - 30960 \cos(4r) - 12160 \cos(6r) + \right. \\
&\quad \left. -2976 \cos(8r) - 384 \cos(10r) - 16 \cos(12r) - 31584) + 2002 \cos(2r) + 208 \cos(4r) + \right. \\
&\quad \left. -1092 \cos(6r) - 1288 \cos(8r) - 820 \cos(10r) - 336 \cos(12r) + \right. \\
&\quad \left. -89 \cos(14r) - 14 \cos(16r) - \cos(18r) + 1430\&, 1 \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Negatividad de los enredos 1-4 con cuatro observadores acelerados

$$\begin{aligned}
N_{A,B_1 C_1 D_1 E_1} &= \frac{1}{640} \left(\left| 4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -32\sqrt{2}\sqrt{\cos^{12}(r)(60 \cos(2r) + \cos(4r) + 67)} + 5 \right| + \left| 240 \cos(2r) + 92 \cos(4r) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +16 \cos(6r) + \cos(8r) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -8\sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(904 \cos(2r) + 156 \cos(4r) + 56 \cos(6r) + \cos(8r) + 931)} + 163 \right| \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Negatividad de los enredos 1-4 con todos los observadores acelerados

$$\begin{aligned}
 N_{A_1, B_1 C_1 D_1 E_1} = N_{E_I, A_I B_I C_I D_I} = N_{D_1, AB_1 C_1 E_1} = N_{C_1, AB_1 D_1 E_1} = N_{B_1, AC_1 D_1 E_1} = \\
 \frac{1}{640} \left| 20 \cos(2r) - 20 \cos(4r) - 20 \cos(6r) - 5 \cos(8r) + \right. \\
 \left. - 32\sqrt{2} \sqrt{\cos^{12}(r)(41(\cos(4r) + 3) - 36 \cos(2r)) + 25} \right| \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

3.2.4. Análisis de los enredos 1-4 de sistemas pentapartita en marcos de referencia no inercial

En la figura 3.1 se grafican los enlaces 1-4 para el caso en que solo un observador es no inercial en los sistemas GHZ y W-class. Como podemos apreciar en el caso GHZ el entrelazamiento cuando todos los observadores son inerciales ($r = 0$) es 1. Luego de que el cúbit E se acelera con respecto a los demás la función de negatividad enredo 1-4 desde la perspectiva de un observador no inercial la negatividad decrece hasta $1/\sqrt{2}$ (29.29% de pérdida del entrelazamiento original). Por otra parte desde la perspectiva del observador no inercial se ve que este percibe en aceleración infinita una negatividad de 0.5 (o sea, 50% del entrelazamiento original), esto es una evidencia de que el entrelazamiento es dependiente del observador.

En el caso del sistema W-class la negatividad cuando todos los cúbits son inerciales es de 0.8, pero si un cúbit es acelerado este comienza a decrecer su entrelazamiento de tal modo que al alcanzar la aceleración infinita los observadores inerciales calculan un entrelazamiento de 0.7048 (11.89% respecto al entrelazamiento inicial), mientras que el único observador no inercial percibe su entrelazamiento como de solo 0.2928 (69.35% de pérdida). Hay que notar desde el punto de vista de los observadores inerciales los sistemas W-class son más robustos respecto a evitar la pérdida de entrelazamiento que los sistemas GHZ.

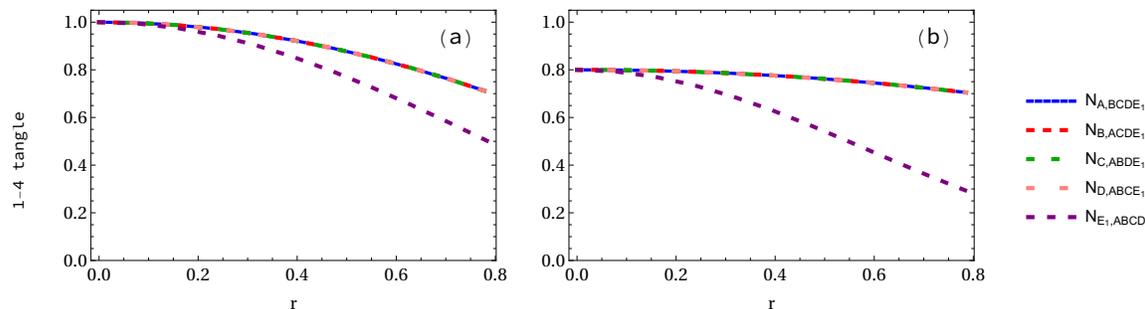


Figura 3.1: (a) El enredo 1-4 desde el punto de vista de cada observador en el estado GHZ cuando uno de estos es acelerado. (b) El enredo 1-4 desde el punto de vista de cada observador en el estado W-class cuando uno de estos es acelerador.

En la figura 3.2 está graficada la negatividad enredo 1-4 cuando dos de los cinco observadores son no inerciales. De nuevo se ve que cuando la velocidad relativa entre los cúbits es cero la negatividad del sistema GHZ es 1, pero que cuando estos dos cúbits alcanzan la aceleración infinita tenemos dos situaciones, una es el entrelazamiento visto desde el punto de vista de los observadores inerciales que es de 0.5 (50% de pérdida de entrelazamiento), la otra situación es el entrelazamiento visto por el observador no inercial, este llega a ser en aceleración infinita de solo 0.3903 (60.97% de pérdida).

En el caso de los estados W-class de nuevo se tiene que hay un entrelazamiento inicial de 0.8 ya que todos los observadores son inerciales. Esta vez aceleramos dos de los cúbits de este sistema y vemos que en aceleración infinita el entrelazamiento decae hasta 0.5924 (25.94% de pérdida de entrelazamiento) desde el punto de vista los observadores inerciales, pero desde la perspectiva de los no inerciales el entrelazamiento llega a caer hasta 0.2451 (69.35% de pérdida). De nuevo se nota la robustez de los sistemas W-class respecto a los GHZ en cuanto a resistir la pérdida de entrelazamiento, esto desde la perspectiva inercial.

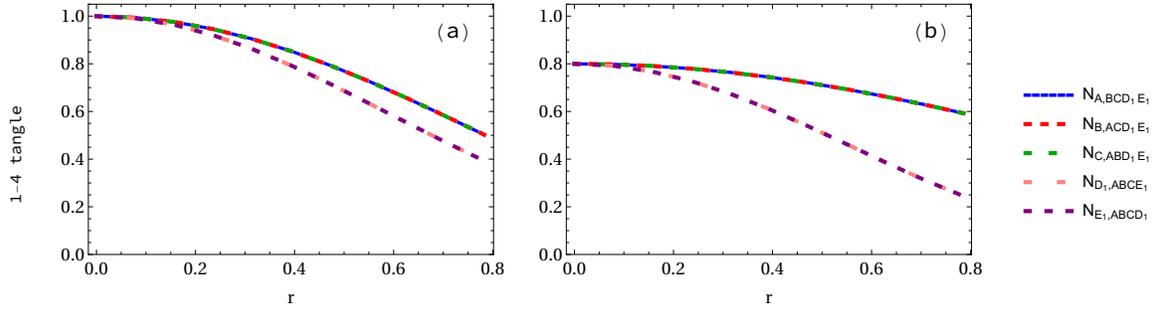


Figura 3.2: (a) Enredo 1-4 desde el punto de vista de los observadores inerciales en un sistema GHZ. (b) Enredo 1-4 visto por observadores no inerciales en un sistema GHZ.

Se analiza en la Fig. 3.3 la negatividad del sistema pentapartita cuando 3 de sus cúbits son acelerados desde $r = 0$ hasta $r = \pi/4$. El enredo 1-4 visto por los observadores inerciales es diferente de los no inerciales, esto en el sistema GHZ, llegando a ser de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (64.65 % de pérdida) desde la perspectiva inercial, por su lado el enlace 1-4 que se calcula aprecia el observador no inercial es de 0.2965 (70.35 % de pérdida).

Por otro lado en los estados W-class los observadores inerciales miden 0.4529 en aceleración infinita (43.38 % de pérdida de entrelazamiento), mientras que el observador no inercial ve 0.1966 (75.41 % de pérdida). Es interesante notar que se sigue cumpliendo la característica de robustez en sistemas W-class desde la perspectiva del observador inercial.

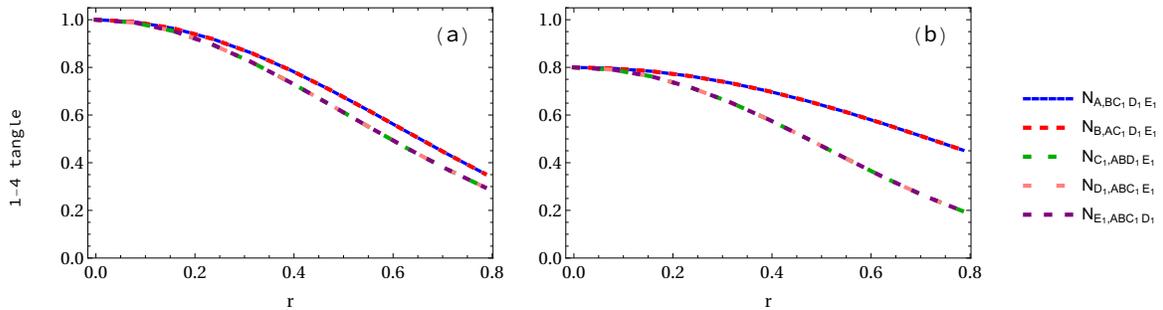


Figura 3.3: (a) Enredos 1-4 de cada uno de los observadores en un sistema pentapartita GHZ con 3 cúbits no inerciales. (b) Enredos 1-4 como función del parámetro r en sistema pentapartita W-class donde 3 cúbits son no inerciales.

Toca analizar la figura Fig 3.4 donde se grafican los enredos 1-4 de los sistemas GHZ (lado izquierdo) y W-class (lado derecho), esto para 4 cúbits acelerados. En los sistemas GHZ se aprecia que en aceleración infinita el entrelazamiento visto por observadores inerciales es de 0.2206 (77.94 % del entrelazamiento original), luego el visto por los observadores no inerciales es de 0.2206 (77.94 % de pérdida). Es interesante ver que a pesar de que las funciones de entrelazamiento son distintas en todo el intervalo $r \in [0, \pi/4]$ en aceleración infinita ($r = 0$) ambos observadores, inerciales y no inerciales medirán el mismo valor de enredo 1-4.

Se tiene que para el sistema pentapartita W-class con 4 cúbits acelerados, el enredo 1-4 visto por los inerciales es de 0.1870 (76.62 % de pérdida), mientras que un observador no inercial aprecia un enredo 1-4 de 0.1436 (82.04 % de pérdida de entrelazamiento).

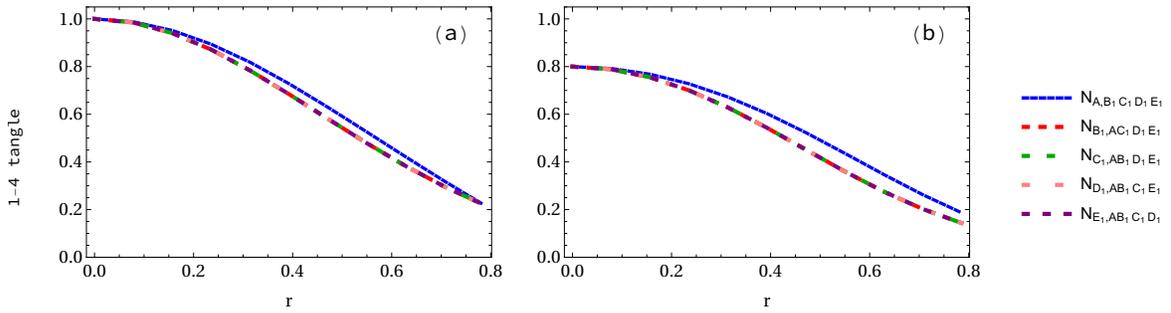


Figura 3.4: (a) Enredos 1-4 de un sistema GHZ con 4 cúbits acelerados
(b) Enredos 1-4 de un sistema W-class con 4 cúbits acelerados.

Por último se revisa los enredos 1-4 cuando todos los observadores son no inerciales. Se puede hacer esto ya que la matriz de densidad del sistema pentapartita evoluciona mostrando que se reduce el entrelazamiento al crecer el parámetro r . Se podría pensar que es una descripción dada por un observador inercial respecto al sistema pentapartita totalmente no inercial. Entonces lo que se tiene es que el entrelazamiento dado para cualquier observador decae en los sistemas GHZ de 1 hasta 0.1455 (85.45 % de pérdida de entrelazamiento).

Al mismo tiempo tenemos que los enredos 1-4 dados en un sistema W-class reducen su entrelazamiento de 0.8 siendo inerciales hasta 0.0596 a velocidad infinita (92.54 % de pérdida del entrelazamiento original).

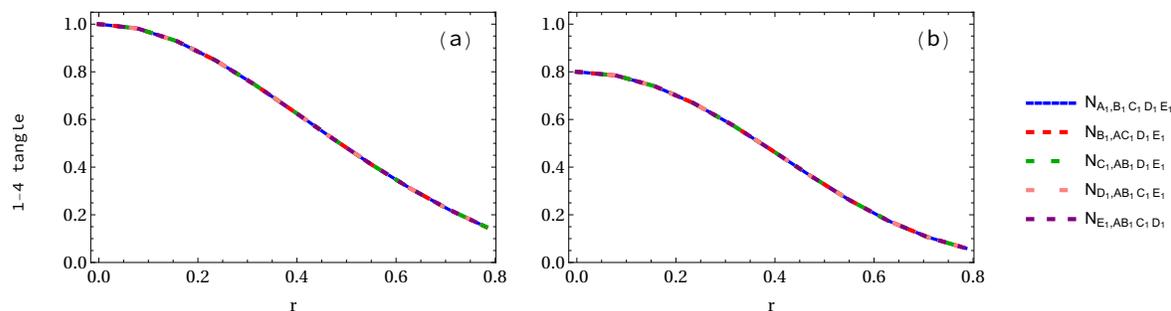


Figura 3.5: (a) Enredos 1-4 en sistemas GHZ cuando todos los observadores son no inerciales. (b) Enredos 1-4 en sistemas W-class cuando todos los observadores son no inerciales.

Se hace una comparación de los comportamientos cuando los cúbits son acelerados uno a uno con respecto al mismo observador en las Figs. 3.6, 3.7 y 3.8 donde se puede reconocer que tanto en sistemas GHZ como W-class el entrelazamiento es dependiente del número de cúbits acelerados, pero que es incluso más abrupta la pérdida de entrelazamiento cuando el número de observadores no inerciales es mayor o igual a 3. Es sumamente interesante el comportamiento observado en la Fig. 3.7 ya que a pesar de que se supone que los cúbits A y C son intercambiables y que debería producir los mismos comportamientos, la matemática nos predice entrelazamientos distintos.

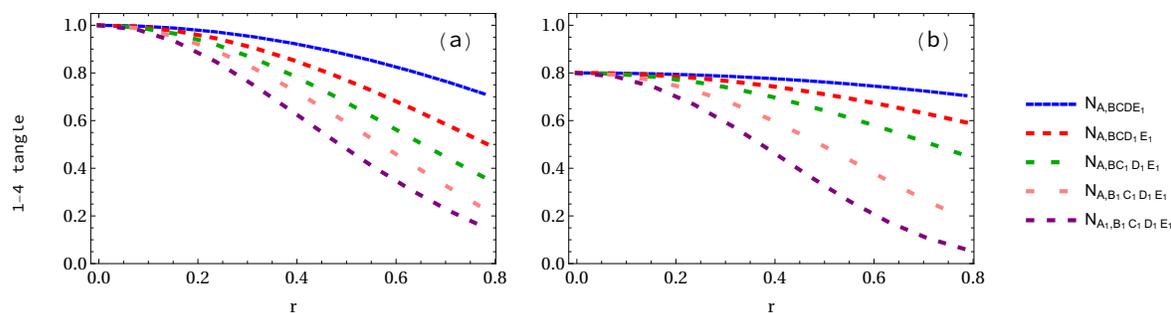


Figura 3.6: (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit A en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit A en un sistema pentapartita W-class.

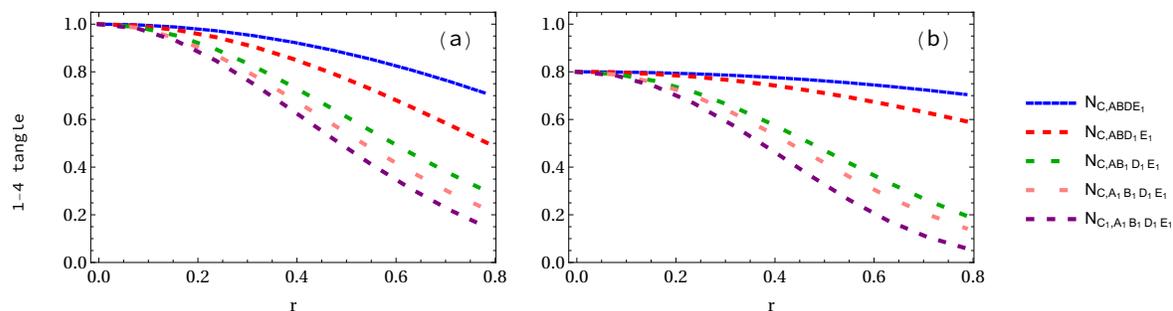


Figura 3.7: (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit C en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit C en un sistema pentapartita W-class.

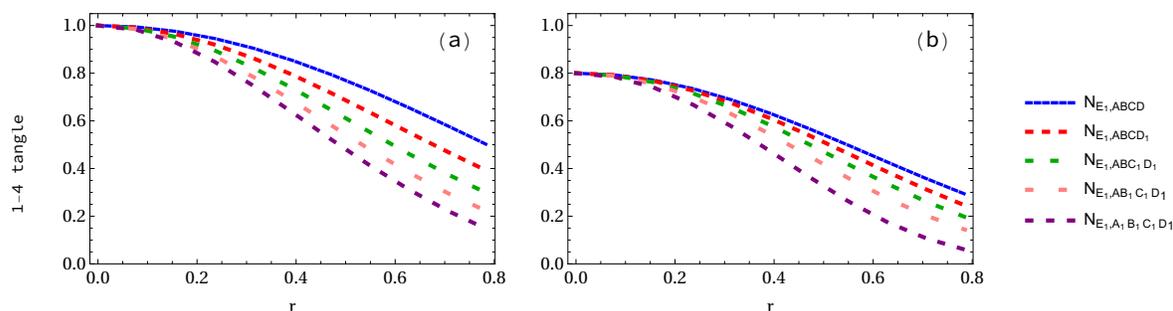


Figura 3.8: (a) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit E en un sistema pentapartita GHZ. (b) Comparación de la función de enredo 1-4 conforme 1,2,3,4 y todos los observadores son acelerados, esto desde la perspectiva del cúbit E en un sistema pentapartita W-class.

Como una última observación en el estudio de los enredos 1-4 hay que hacer notar que en todos los casos estudiados hasta aquí, el entrelazamiento no desvanece del todo aún a velocidad infinita.

3.2.5. Negatividad de los enredos 2-3

Aún a pesar de que los enredos 2-3 no son necesarios para el cálculo de las medidas de entrelazamiento total π se analizan en los sistemas pentapartita en marcos de referencia no inerciales por completitud.

En este análisis no se exploran todas los enlaces 2-3, sólo los más representativas, a saber, el enredo 2-3 de pares inerciales, el de una pareja combinación de un cúbit inercial con uno no inercial y por supuesto el de el par no inercial.

En la figura 3.9-a tenemos el enredo 2-3 de un sistema pentapartita GHZ con un solo observador acelerado, como podemos ver el enredo 2-3 cae de su valor inercial 1 hasta $1/\sqrt{2}$ cuando $r = \pi/4$, además es de destacar que todos los observadores ven el mismo entrelazamiento.

En el caso del sistema W-class (Fig. 3.9-b) se aprecia que el entrelazamiento inercial es de 0.9797 pero este cae a través de dos funciones dependientes del observador. Así, el entrelazamiento desde la perspectiva de un observador inercial en aceleración infinita es de 0.8195 (16.35 % menos respecto al original) y el del no inercial es de 0.7278 (25.71 % de pérdida de entrelazamiento).

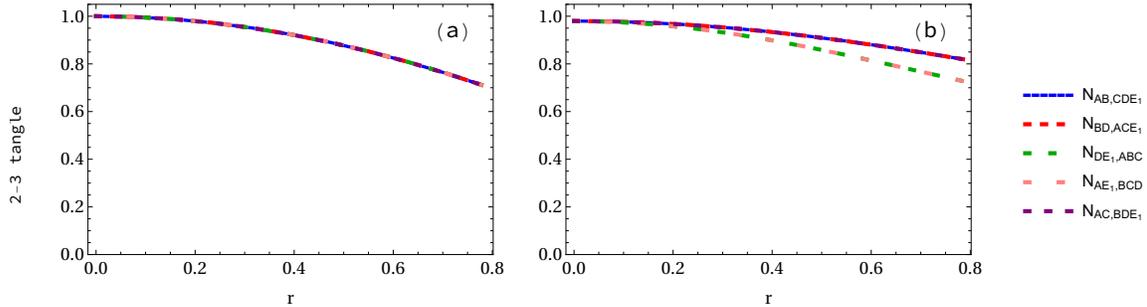


Figura 3.9: (a) Enlace 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con 1 observador no inercial. (b) Enlace 2-3 de sistemas pentapartita W-class con 1 observador no inercial.

Cuando se considera a dos observadores acelerados se aprecia en los sistemas pentapartita GHZ que hay máximo entrelazamiento de 1 cuando es totalmente inercial, la mayoría de las configuraciones ven la misma función decreciente del enredo 2-3 cuando $r \rightarrow \pi/4$, aquí este llega a ser de 0.5. Sólo la configuración con el par totalmente no inercial ve una

función de enredo 2-3 ligeramente diferente, este alcanza un mínimo en aceleración infinita de 0.3903 (ver figura 3.10-a).

Por su lado, los sistemas W-class con dos observadores no inerciales inician su enredo 2-3 en 0.9797 y este cae hasta 0.6159 cuando $r = \pi/4$ en la mayoría de las configuraciones. Sólo la configuración totalmente no inercial sufre un enredo 2-3 marcadamente decreciente, mas en aceleración infinita todavía existe un entrelazamiento de 0.2274 (ver figura 3.10-b).

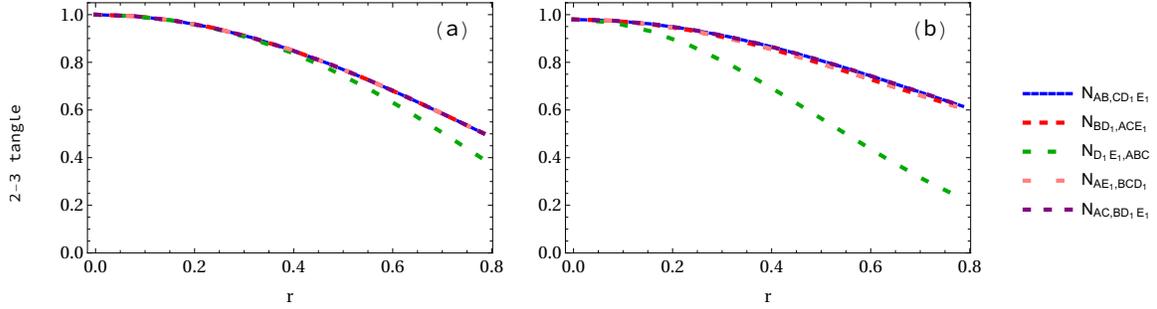


Figura 3.10: (a) Enredo 2-3 en sistemas pentapartita GHZ. Se indica en la figura las diferentes configuraciones de pares de cúbits que se analizan.

(a) Enredo 2-3 en sistemas pentapartita W-class. Se indica en la figura las diferentes configuraciones de pares de cúbits que se analizan.

Si se hacen no inerciales tres cúbits se aprecia que el enredo 2-3 de sistemas pentapartita GHZ es casi el mismo en todos los observadores (Fig. 3.11-a). Comienza en 1 y decae en aceleración infinita hasta 0.2965, siendo la desviación con respecto a las otras configuraciones muy pequeña.

En el caso W-class (Fig. 3.11-b) se observa que la función de enredo 2-3 es diferente dependiendo del número de observadores no inerciales en el par observador, por ejemplo en aceleración infinita $r = \pi/4$ para un par totalmente inercial el entrelazamiento es 0.2774, pero si el par se compone de un observador inercial y uno no inercial entonces el entrelazamiento es de 0.4566, y si tenemos que el par es totalmente no inercial el entrelazamiento es de solo 0.1873.

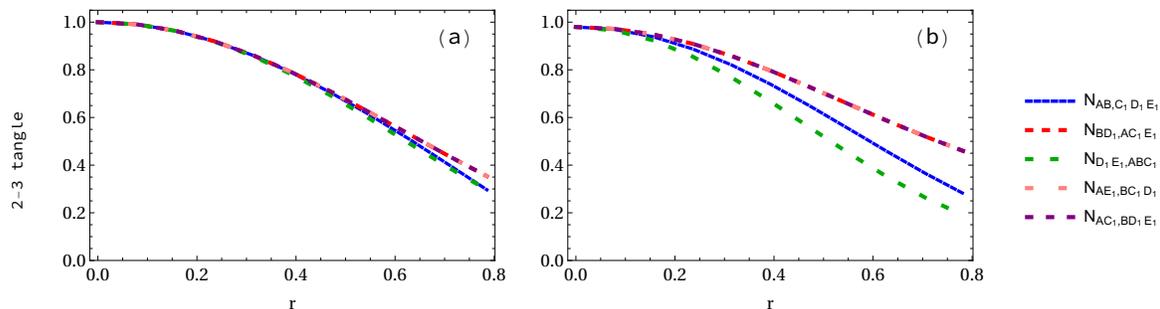


Figura 3.11: (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ en marcos de referencia no inerciales cuando tres cúbits son acelerados. Se prueban varias configuraciones de los pares observadores, tal y como se indica en cada gráfica. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ en marcos de referencia no inerciales cuando tres cúbits son acelerados. Se prueban varias configuraciones de los pares observadores, tal y como se indica en cada gráfica.

Comportamiento de los enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ cuando 4 de los cúbits son no inerciales. Como se puede verificar visualmente en la figura 3.12-a, los enredos 2-3 son similares en extremo. El entrelazamiento inercial es de 1 y decae a 0.2206 si se alcanza la aceleración infinita $r = \pi/4$.

Por otra parte, en los sistemas pentapartita W-class se tiene que se presentan dos comportamientos dependiendo del número de observadores no inerciales que tenga el enredo 2-3 (ver Fig. 3.12-a). Cuando el par observador se compone de un cúbit inercial y uno no inercial se tiene que el entrelazamiento decae hasta 0.1976 en aceleración infinita, pero si el par observador esta compuesto por dos cúbits no inerciales el entrelazamiento decae a 0.1376.

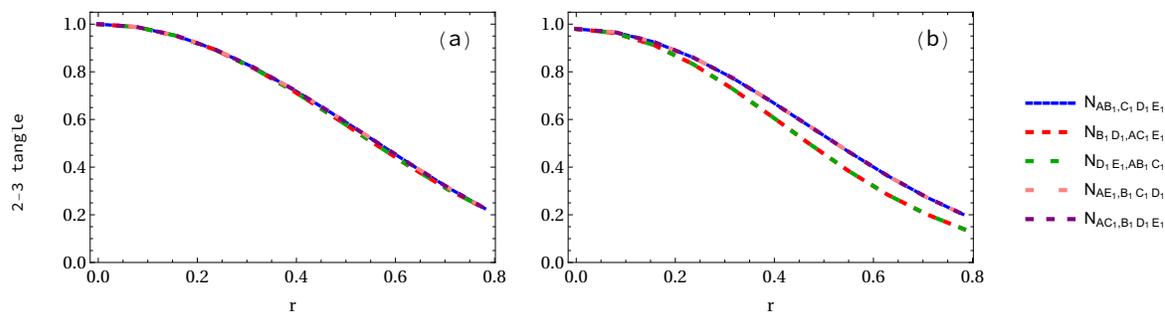


Figura 3.12: (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con cuatro cúbits acelerados. Se muestran las funciones enredo 2-3 para varias configuraciones de pares observadores. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita W-class con cuatro cúbits acelerados. Se muestran las funciones enredo 2-3 para varias configuraciones de pares observadores.

Si todos los observadores son no inerciales tenemos que las funciones de enredo 2-3 en sistemas GHZ y W-class se parecen bastante y todos los pares observadores ven el mismo entrelazamiento (vea la figura 3.13).

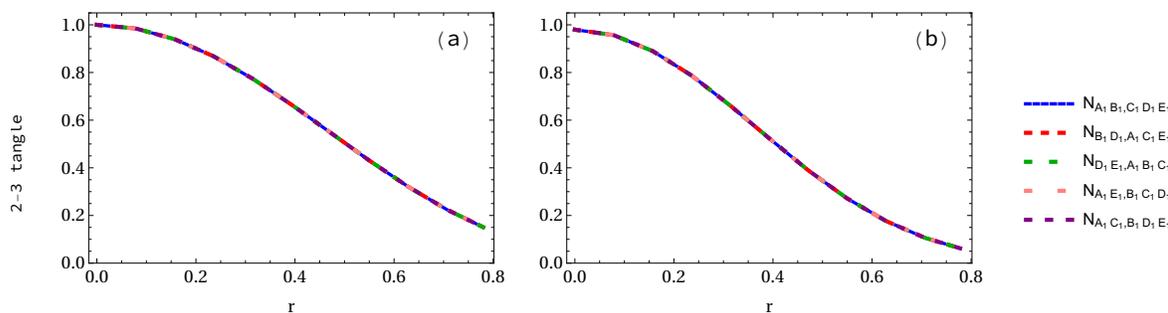


Figura 3.13: (a) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita GHZ con 5 cúbits acelerados. (b) Enredos 2-3 de sistemas pentapartita W-class con 5 cúbits acelerados.

Para finalizar esta sección se muestra la evolución de la función de enredo 2-3 en sistemas pentapartita GHZ y W-class conforme aumenta el número de cúbits acelerados. (Fig. 3.14). En general se observa un comportamiento decreciente de la función de entrelazamiento, pero este nunca desvanece en aceleración infinita.

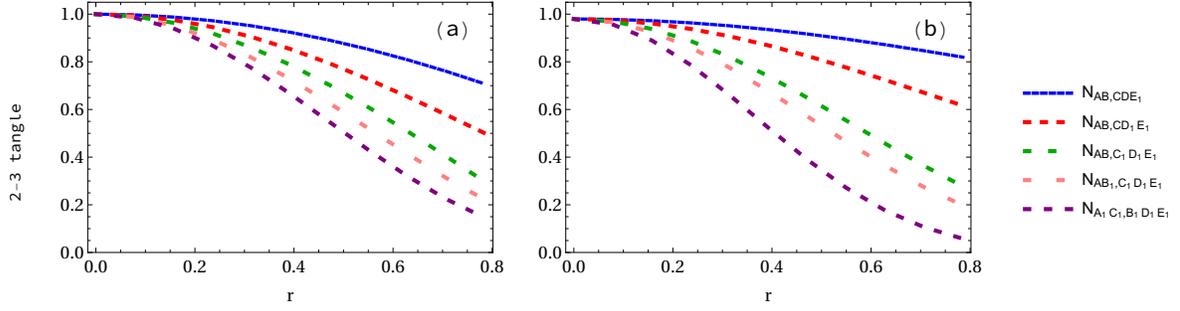


Figura 3.14: (a) Comparación de las funciones de entrelazamiento de sistemas GHZ no inerciales conforme aumenta en número de cúbits acelerados. (b) Comparación de las funciones de entrelazamiento de sistemas W-class no inerciales conforme aumenta en número de cúbits acelerados.

3.3. Medidas de entrelazamiento residual total

Se estudio el entrelazamiento residual total π_5 y Π_5 en los sistemas pentapartita GHZ y W-class y se hacen comparaciones mediante gráficas. Primero escribimos las expresiones analíticas resultantes.

3.3.1. Expresiones analíticas del entrelazamiento residual total π_5 y Π_5 en sistemas GHZ

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y Π_5 de sistemas pentapartita GHZ con un observador acelerado.

$$\frac{1}{\pi_5} = \frac{1}{5} (4 \cos^2(r) + \cos^4(r)) \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{\Pi_5} = (\cos^{12}(r))^{1/5} \quad (3.22)$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita GHZ con dos observadores acelerados.

$$\frac{2}{\pi_5} = \frac{1}{5} \left(3 \cos^4(r) + \frac{1}{128} \left(1 - \cos(4r) - 2\sqrt{2} \sqrt{\cos^4(r)(35 - 4 \cos(2r) + \cos(4r))} \right)^2 \right) \quad (3.23)$$

$$\frac{2}{\Pi_5} = \frac{\left(\cos^{12}(r) \left(1 - \cos(4r) - 2\sqrt{2}\sqrt{\cos^4(r)(35 - 4\cos(2r) + \cos(4r))} \right)^4 \right)^{1/5}}{8 \cdot 2^{1/5}} \quad (3.24)$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita GHZ con tres observadores acelerados.

$$\frac{3}{\pi_5} = \frac{1}{5} \left(2 \cos^6(r) + \frac{3}{4096} (2 + \cos(2r) - 2 \cos(4r) - \cos(6r) - 4\sqrt{2}\sqrt{\cos^6(r)(130 - \cos(2r) - 2 \cos(4r) + \cos(6r))})^2 \right) \quad (3.25)$$

$$\frac{3}{\Pi_5} = \frac{1}{128 \cdot 2^{1/5}} \left(\cos^{12}(r) \left(2 + \cos(2r) - 2 \cos(4r) - \cos(6r) - 4\sqrt{2}\sqrt{\cos^6(r)(130 - \cos(2r) - 2 \cos(4r) + \cos(6r))} \right)^6 \right)^{1/5} \quad (3.26)$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita GHZ con cuatro observadores acelerados.

$$\frac{4}{\pi_5} = \frac{1}{5} \left(\frac{\left(5 + 4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) - \sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(515 - 4 \cos(4r) + \cos(8r))} \right)^2}{16384} + \frac{1}{65536} \left(\frac{35 - 56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) - 8 \cos(6r) + \cos(8r) - 42275 + 45904 \cos(2r) + 36680 \cos(4r) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{(3824 \cos(6r) + 2844 \cos(8r) - 560 \cos(10r) + 120 \cos(12r) - 16 \cos(14r) + \cos(16r)})}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\Pi_5} = \frac{1}{65536} & \left(\begin{aligned} & \left(5 + 4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) \right. \\ & \left. - 8\sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(515 - 4 \cos(4r) + \cos(8r))} \right)^8 \\ & \left(35 - 56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) - 8 \cos(6r) + \cos(8r) - \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\begin{aligned} & \left(42275 + 45904 \cos(2r) + 36680 \cos(4r) + \right. \\ & \left. 3824 \cos(6r) + 2844 \cos(8r) - 560 \cos(10r) + \right. \\ & \left. \left. + 120 \cos(12r) - 16 \cos(14r) + \cos(16r) \right) \right)^2 \end{aligned} \right)^{1/5} \end{aligned} \right) \end{aligned} \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita GHZ con cinco observadores acelerados.

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{\pi_5} = \frac{1}{65536} & \left(\begin{aligned} & - 7 + 4 \cos(4r) + 3 \cos(8r) + \\ & \sqrt{2} \sqrt{\cos^4(r) \left(\begin{aligned} & \left(11851 + 12532 \cos(2r) + 8156 \cos(4r) - \right. \\ & \left. 116 \cos(6r) + 436 \cos(8r) - 124 \cos(10r) + \right. \\ & \left. \left. 36 \cos(12r) - 4 \cos(14r) + \cos(16r) \right) \right)^2} \end{aligned} \right)^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^5 = \frac{1}{65536} & \left(\left(-7 + 4 \cos(4r) + 3 \cos(8r) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{2} \cos^4(r) \left(\begin{array}{l} 11851 + 12532 \cos(2r) + 8156 \cos(4r) - \\ 116 \cos(6r) + 436 \cos(8r) - 124 \cos(10r) + \\ 36 \cos(12r) - 4 \cos(14r) + \cos(16r) \end{array} \right) \right)^{10} \right)^{1/5} \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3.2. Expresiones analíticas del entrelazamiento residual total π_5 y enredo- Π_5 en sistemas W-class

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita W-class con un solo observador acelerado.

$$\begin{aligned} \pi_5^1 = \frac{1}{5} & \left(\frac{16}{25} \left| \text{Root} \left[32\#1^3 + (16 \cos(2r) - 16)\#1^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. (-64 \cos(2r) - 12 \cos(4r) - 52)\#1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \cos(2r) - 6 \cos(4r) - 3 \cos(6r) + 6\&, 1 \right] \right|^2 + \\ & \frac{1}{25} \left| -2 \cos(2r) - \sqrt{2} \sqrt{\cos(4r) + 7} + 2 \right|^2 + \\ & \left. - \frac{12}{25} (\sqrt{13} - 3)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^1 = \frac{1}{5^{2/5}} & \left| -2 \cos(2r) - \sqrt{2} \sqrt{\cos(4r) + 7} + 2 \right|^{2/5}. \\ & \sqrt[5]{ \left(\begin{array}{l} \frac{4}{25} \left| \text{Root} \left[32\#1^3 + (16 \cos(2r) - 16)\#1^2 + (-64 \cos(2r) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. 12 \cos(4r) - 52)\#1 + -6 \cos(4r) - 3 \cos(6r) + 6\&, 1 \right] \right|^2 - \frac{3}{25} (\sqrt{13} - 3)^2 \end{array} \right)^4 } \end{aligned} \quad (3.32)$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita W-class con dos observadores acelerados.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi_5} = & \frac{1}{5} \left(\frac{1}{50} \left| \text{Root} \left[2\#1^3 + 8 \cos(2r) + 3 \cos(4r) - 11\#1^2 - 64 \cos(2r) - 28 \cos(4r) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 36\#1 + 12 \cos(2r) - 12 \cos(4r) - 12 \cos(6r) - 3 \cos(8r) + 15\&, 1] \right|^2 + \right. \\
& \frac{3}{100} \left| \text{Root} \left[16\#1^3 + 8 \cos(4r) - 8\#1^2 + (-464 \cos(2r) - 208 \cos(4r) \right. \right. \\
& \left. \left. - 48 \cos(6r) - 4 \cos(8r) - 300) \#1 + 48 \cos(2r) - 15 \cos(4r) - 40 \cos(6r) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 26 \cos(8r) - 8 \cos(10r) - \cos(12r) + 42\&, 1] \right|^2 - \frac{6}{25} \sqrt{13} - 3^2 \right) \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Respecto a la expresión devuelta por MATHEMATICA en este y otros resultados similares, se trata de una versión correcta de los resultados en términos de la función *Root*. Esto reduce bastante la longitud del resultado.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\Pi_5} = & \frac{1}{10^{4/5}} \left| \text{Root} \left[2\#1^3 + (8 \cos(2r) + 3 \cos(4r) - 11)\#1^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-64 \cos(2r) - 28 \cos(4r) - 36)\#1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 12 \cos(2r) - 12 \cos(4r) - 12 \cos(6r) - 3 \cos(8r) + 15\&, 1] \right|^{4/5} \cdot \\
& \sqrt[5]{ \left(\frac{1}{100} \left| \text{Root} \left[16\#1^3 + (8 \cos(4r) - 8)\#1^2 + (-464 \cos(2r) - 208 \cos(4r) - \right. \right. \right. \right. \quad (3.34) \\
& \left. \left. \left. 48 \cos(6r) - 4 \cos(8r) - 300)\#1 + 48 \cos(2r) - 15 \cos(4r) - 40 \cos(6r) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. 26 \cos(8r) - 8 \cos(10r) + - \cos(12r) + 42\&, 1] \right|^2 - \frac{2}{25} \left(\sqrt{13} - 3 \right)^2 \right)^3 \right)
\end{aligned}$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita W-class

con tres observadores acelerados.

$$\begin{aligned}
 \pi_5^3 = & \frac{1}{5} \left(\frac{3}{100} \left| \text{Root} [64\#1^3 + (-16 \cos(2r) + 128 \cos(4r) + 16 \cos(6r) - 128)\#1^2 + \right. \right. \\
 & + (-1728 \cos(2r) - 960 \cos(4r) - 320 \cos(6r) - 48 \cos(8r) - 1040)\#1 + \\
 & 165 \cos(2r) - 22 \cos(4r) - 121 \cos(6r) - 100 \cos(8r) \\
 & \left. - 43 \cos(10r) - 10 \cos(12r) - \cos(14r) + 132\&, 1] \right|^2 + \\
 & + \frac{1}{50} \left| \text{Root} [2048\#1^3 + (-256 \cos(2r) + 512 \cos(4r) + 256 \cos(6r) - 512)\#1^2 + \right. \\
 & + (-52992 \cos(2r) - 30960 \cos(4r) - 12160 \cos(6r) - 2976 \cos(8r) - \\
 & 384 \cos(10r) - 16 \cos(12r) - 31584)\#1 + 2002 \cos(2r) + 208 \cos(4r) - \\
 & 1092 \cos(6r) - 1288 \cos(8r) - 820 \cos(10r) - 336 \cos(12r) - 89 \cos(14r) - 14 \cos(16r) - \\
 & \left. \left. \cos(18r) + 1430\&, 1] \right|^2 - \frac{2}{25} \left(\sqrt{13} - 3 \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_5^3 = & \frac{1}{10\sqrt[5]{10}} \left| \text{Root} [64\#1^3 + (-16 \cos(2r) + 128 \cos(4r) + 16 \cos(6r) - 128)\#1^2 + \right. \\
 & (-1728 \cos(2r) - 960 \cos(4r) - 320 \cos(6r) - 48 \cos(8r) - 1040)\#1 + 165 \cos(2r) + \\
 & \left. - 22 \cos(4r) - 121 \cos(6r) - 100 \cos(8r) - 43 \cos(10r) - 10 \cos(12r) - \cos(14r) + \right|^{6/5} \cdot \\
 & 132\&, 1] \cdot \\
 & \sqrt[5]{ \left(\frac{1}{100} \left| \text{Root} [2048\#1^3 + (-256 \cos(2r) + 512 \cos(4r) + 256 \cos(6r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - 512)\#1^2 + (-52992 \cos(2r) - 30960 \cos(4r) - 12160 \cos(6r) - 2976 \cos(8r) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 384 \cos(10r) - 16 \cos(12r) - 31584)\#1 + 2002 \cos(2r) + 208 \cos(4r) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 1092 \cos(6r) - 1288 \cos(8r) - 820 \cos(10r) - 336 \cos(12r) - 89 \cos(14r) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 14 \cos(16r) - \cos(18r) + 1430\&, 1] \right|^2 - \frac{1}{25} \left(\sqrt{13} - 3 \right)^2 \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita W-class

con cuatro observadores acelerados.

$$\begin{aligned}
 \pi_5^4 = & \frac{1}{5} \left(\frac{1}{400} \left| \text{Root} \left[128\#1^3 + (-320 \cos(2r) + 576 \cos(4r) + 320 \cos(6r) + 16 \cos(8r) + \right. \right. \right. \\
 & - 592)\#1^2 + (-49920 \cos(2r) - 31920 \cos(4r) - 14720 \cos(6r) - 4640 \cos(8r) + \\
 & - 896 \cos(10r) - 80 \cos(12r) - 28896)\#1 + 7072 \cos(2r) + \\
 & 1326 \cos(4r) - 3264 \cos(6r) - 4488 \cos(8r) - 3264 \cos(10r) - 1581 \cos(12r) - \\
 & 528 \cos(14r) - 118 \cos(16r) - 16 \cos(18r) - \cos(20r) + 4862\&, 1] \Big|^2 + \\
 & \frac{1}{409600} \left(\left| 4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - 32\sqrt{2}\sqrt{\cos^{12}(r)(60 \cos(2r) + \cos(4r) + 67) + 5} \right| + \right. \\
 & \left. \left| 240 \cos(2r) + 92 \cos(4r) + 16 \cos(6r) + \cos(8r) - 8 \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(904 \cos(2r) + 156 \cos(4r) + 56 \cos(6r) + \cos(8r) + 931) + 163} \right|^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_5^4 = & \frac{1}{3200 \cdot 2^{3/5}} \left(\sqrt[5]{ \left(\left| 4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) - 32 \cdot \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \sqrt{2}\sqrt{\cos^{12}(r)(60 \cos(2r) + \cos(4r) + 67) + 5} \right| + \right. \\
 & \left. \left| 240 \cos(2r) + 92 \cos(4r) + 16 \cos(6r) + \cos(8r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - 8\sqrt{2}\sqrt{\cos^8(r)(904 \cos(2r) + 156 \cos(4r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. 56 \cos(6r) + \cos(8r) + 931) + 163} \right|^2 \right) \\
 & \cdot \left| \text{Root} \left[128\#1^3 + (-320 \cos(2r) + 576 \cos(4r) + 320 \cos(6r) + 16 \cos(8r) - 592)\#1^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (-49920 \cos(2r) - 31920 \cos(4r) - 14720 \cos(6r) - 4640 \cos(8r) - 896 \cos(10r) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 80 \cos(12r) + -28896)\#1 + 7072 \cos(2r) + 1326 \cos(4r) - 3264 \cos(6r) - 4488 \cos(8r) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 3264 \cos(10r) - 1581 \cos(12r) - 528 \cos(14r) - 118 \cos(16r) - 16 \cos(18r) - \cos(20r) + \right. \right. \\
 & \left. \left. 4862\&, 1] \right|^{8/5}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Entrelazamiento residual total enredo- π_5 y enredo- Π_5 de sistemas pentapartita W-class con cinco observadores acelerados.

$$\begin{aligned} \pi_5^5 = \frac{1}{409600} & \left| 20 \cos(2r) - 20 \cos(4r) - 20 \cos(6r) - 5 \cos(8r) + \right. \\ & \left. - 32\sqrt{2}\sqrt{\cos^{12}(r)(41(\cos(4r) + 3) - 36 \cos(2r))} + 25 \right|^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^5 = \frac{1}{409600} & \left| 20 \cos(2r) - 20 \cos(4r) - 20 \cos(6r) - 5 \cos(8r) + \right. \\ & \left. - 32\sqrt{2}\sqrt{\cos^{12}(r)(41(\cos(4r) + 3) - 36 \cos(2r))} + 25 \right|^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

En la figura 3.15-a se muestra el entrelazamiento residual total π_5 de los sistemas pentapartita GHZ en un marco de referencia no inercial. Vemos que inercialmente el entrelazamiento es 1, pero que este decrece como función del parámetro r y del número de cúbits acelerados, de modo que en aceleración infinita se tienen resultados del entrelazamiento que se muestran en la tabla 3.5

Tabla 3.5: Entrelazamiento residual total π_5 de sistemas pentapartita GHZ

Número de observadores no inerciales	Entrelazamiento residual total π_5	Perdida de entrelazamiento
1	0.4500	55 %
2	0.2109	78.91 %
3	0.1027	89.73 %
4	0.0457	95.13 %
5	0.0211	97.89 %

Por otro lado Fig. 3.15-b se muestra los resultados para los sistemas W-class. Lo primero que salta a la vista es que el entrelazamiento residual total π_5 inercialmente es de 0.5813. Pero conforme aumenta la aceleración de los observadores el entrelazamiento decrece como se detalla en la tabla 3.6

Tabla 3.6: Entrelazamiento residual total π_5 de sistemas pentapartita W-class

Numero de observadores no inerciales	Entrelazamiento residual total π_5	Perdida de entrelazamiento
1	0.3793	34.73 %
2	0.2170	62.66 %
3	0.0944	82.90 %
4	0.0234	95.95 %
5	0.0035	99.38 %

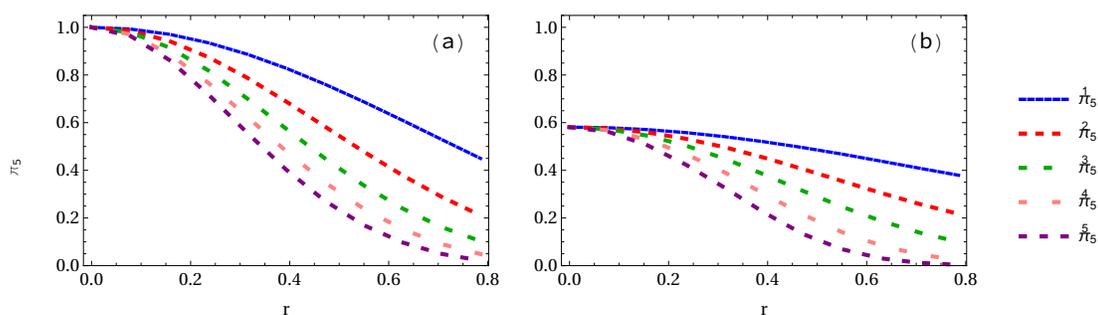


Figura 3.15: (a) Entrelazamiento residual total π_5 en sistemas pentapartita GHZ. Cada gráfica es del estudio correspondiente a 1,2,3,4 y todos los observadores no-inerciales. (b) Entrelazamiento residual total Π_5 en sistemas pentapartita GHZ. Cada gráfica es del estudio correspondiente a 1,2,3,4 y todos los observadores no-inerciales.

Se puede afirmar que el entrelazamiento residual total Π_5 es muy similar al π_5 a razón de lo que se puede observar en la figura 3.16-a,b y porque así se verificó numéricamente.

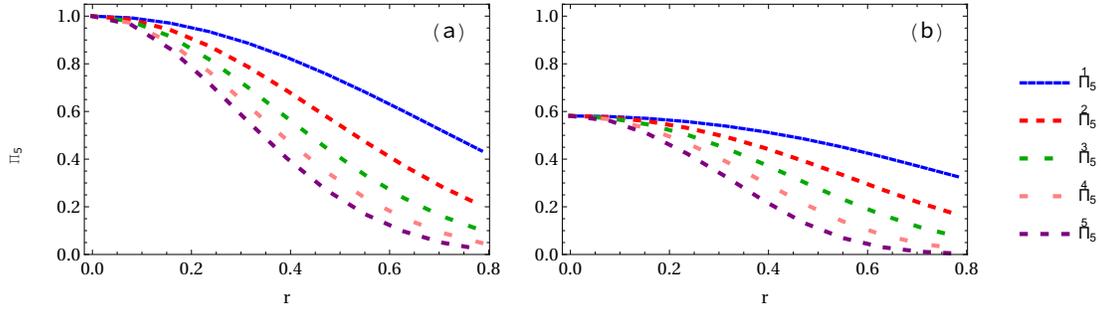


Figura 3.16: (a) Entrelazamiento residual total Π_5 de los sistemas GHZ. Cada función corresponde a uno de los casos de estudio cuando 1,2,3,4 y todos los observadores son no inerciales. (b) Entrelazamiento residual total Π_5 de los sistemas W-class. Cada función corresponde a uno de los casos de estudio cuando 1,2,3,4 y todos los observadores son no inerciales.

Se compara el entrelazamiento residual total π_5 y Π_5 para el caso de tres cúbits acelerados a fin de verificar visualmente que estos son muy similares (ver la figura 3.17.

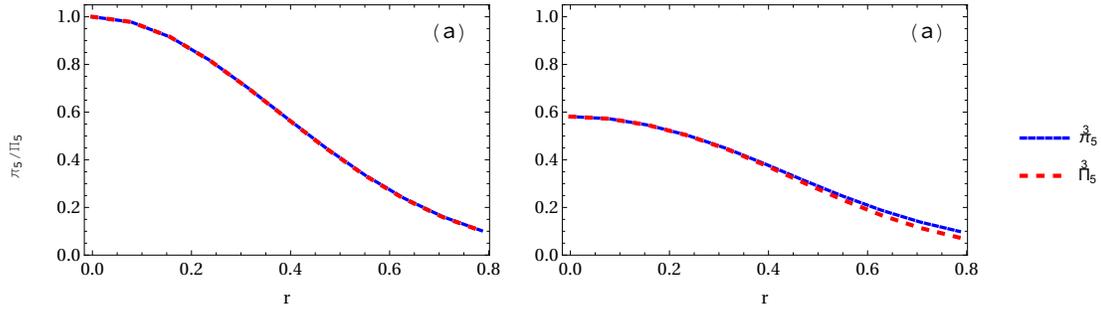


Figura 3.17: (a) Comparación del entrelazamiento residual total π_4 y Π de sistemas pentapartita GHZ cuando hay 3 observadores no inerciales. (a) Comparación del entrelazamiento residual total π_4 y Π de sistemas pentapartita W-class cuando hay 3 observadores no inerciales.

3.4. Entropía

La entropía es el valor medio de los bits necesarios par transmitir o almacenar información haciendo uso de un código binario (Shannon, 1948; Cover and Thomas, 2006). Es útil para cuantificar el entrelazamiento ya que los estados puros tienen menos entropía que

sus partes (Wilde, 2017). Cuando un estado GHZ se vuelve no inercial, surgen estados de antipartícula. Estos estados son removidos por medio de la traza sobre los estados no accesibles de la matriz de una matriz de densidad en un marco de referencia no inercial. Esto tiende a producir una matriz de densidad mezclada (Asensio, 2019). Usando la entropía de von Neumann definida por Bengtsson y Życzkowski (Bengtsson and Życzkowski, 2006; Popescu and Rohrlich, 1997; von Neumann and Beyer, 1996) es posible inferir una pérdida de entrelazamiento inducida por la decoherencia del sistema no inercial. La fórmula explícita de la entropía en este caso es:

$$S = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) = -\sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} \log_2 \lambda^{(i)} \quad (3.41)$$

donde $\lambda^{(i)}$ se refiere al i -ésimo eigenvalor de la matriz de densidad ρ . Donde, para precisar, se dice que a diferencia del cálculo de la negatividad, la entropía de von Neumann no requiere de la transpuesta parcial de la matriz de densidad. En este cálculo solo se requiere la traza parcial para obtener los subsistemas de la región accesible I.

3.4.1. Eigenvalores no nulos de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita GHZ

Tabla 3.7: Eigenvalores de las matrices de densidad de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales

Matrices de densidad	Eigenvalores
ρ_{ABCDE_1}	$\lambda_{31} = \frac{1}{4}(3 + \cos(2r))$ $\lambda_{32} = \frac{\sin^2(r)}{2}$
$\rho_{ABCD_1E_1}$	$\lambda_{29} = \frac{1}{16}(11 + 4 \cos(2r) + \cos(4r))$ $\lambda_{30} = \frac{\sin^4(r)}{2}$ $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \frac{\sin^2(2r)}{8}$
$\rho_{ABC_1D_1E_1}$	$\lambda_{25} = \frac{1}{64}(15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) + \cos(6r) + 42)$ $\lambda_{26} = \lambda_{27} = \lambda_{28} = \lambda_{29} = \lambda_{30} = \lambda_{31} = \frac{1}{2} \sin^4(r) \cos^2(r)$ $\lambda_{32} = \frac{\sin^6(r)}{2}$
$\rho_{AB_1C_1D_1E_1}$	$\lambda_{17} = \frac{1}{256}(56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) + 8 \cos(6r) + \cos(8r) + 163)$ $\lambda_{18} = \lambda_{19} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = \frac{1}{2} \sin^2(r) \cos^6(r)$ $\lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \frac{1}{2} \sin^6(r) \cos^2(r)$ $\lambda_{26} = \frac{\sin^8(r)}{2}$ $\lambda_{27} = \lambda_{28} = \lambda_{29} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = \frac{1}{32} \sin^4(2r)$
$\rho_{A_1B_1C_1D_1E_1}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{1024} \left(382 + 120 \cos(4r) + 10 \cos(8r) + \right.$ $\left. - \sqrt{2} \sqrt{(\cos(4r) + 7)^2 (511 \cos(4r) + 62 \cos(8r) + \cos(12r) + 1474)} \right)$ $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} =$ $\lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{16} = \lambda_{17} = \frac{1}{2} \sin^4(r) \cos^6(r)$ $\lambda_{18} = \lambda_{19} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{26} = \lambda_{27} =$ $\frac{1}{2} \sin^6(r) \cos^4(r)$ $\lambda_{28} = \lambda_{29} = \lambda_{30} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = \frac{1}{2} \sin^8(r) \cos^2(r)$

3.4.2. expresiones analíticas de la entropía

Ahora se escriben las expresiones analíticas de las entropías de los sistemas pentapartita GHZ para 1, 2,3,4, y todos los observadores acelerados.

$$\overset{1}{S} = -\frac{1}{4 \log(2)} (3 + \cos(2r)) \log \left(\frac{1}{4} (3 + \cos(2r)) \right) - \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\sin^2(r)}{2} \right) \sin^2(r) \quad (3.42)$$

$$\overset{2}{S} = -\frac{1}{16 \log(2)} (11 + 4 \cos(2r) + \cos(4r)) \log \left(\frac{1}{16} (11 + 4 \cos(2r) + \cos(4r)) \right) - \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\sin^4(r)}{2} \right) \sin^4(r) - \frac{1}{4 \log(2)} \log \left(\frac{1}{8} \sin(2r)^2 \right) \sin(2r)^2 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{S} = & -\frac{1}{64 \log(2)} (42 + 15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) + \cos(6r)) \cdot \\ & \log \left(\frac{1}{64} (42 + 15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) + \cos(6r)) \right) - \\ & \frac{1}{2 \log(2)} 3 \cos^4(r) \log \left(\frac{1}{2} \cos^4(r) \sin^2(r) \right) \sin^2(r) - \\ & \frac{1}{2 \log(2)} 3 \cos^2(r) \log \left(\frac{1}{2} \cos^2(r) \sin^4(r) \right) \sin^4(r) - \\ & \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\sin^6(r)}{2} \right) \sin^6(r) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{S} = & -\frac{1}{256 \log(2)} (163 + 56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) + 8 \cos(6r) + \cos(8r)) \\ & \log \left(\frac{1}{256} (163 + 56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) + 8 \cos(6r) + \cos(8r)) \right) - \\ & \frac{1}{\log(2)} 2 \cos^6(r) \log \left(\frac{1}{2} \cos^6(r) \sin^2(r) \right) \sin^2(r) - \frac{1}{\log(2)} 2 \cos^2(r) \\ & \log \left(\frac{1}{2} \cos^2(r) \sin^6(r) \right) \sin^6(r) - \\ & \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\sin^8(r)}{2} \right) \sin^8(r) - \frac{1}{16 \log(2)} 3 \log \left(\frac{1}{32} \sin(2r)^4 \right) \\ & \sin(2r)^4 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$\overset{5}{S} =$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2097152 \log(2)} \\
& (782336 + 245760 \cos(4r) + 20480 \cos(8r) - \\
& \sqrt{((-782336 - 245760 \cos(4r) - 20480 \cos(8r))^2 - \\
& 2097152(126 - 210 \cos(4r) + 120 \cos(8r) - 45 \cos(12r) + 10 \cos(16r) - \cos(20r))}) \\
& \log(\\
& \frac{1}{2097152} (782336 + 245760 \cos(4r) + 20480 \cos(8r) - \\
& \sqrt{((-782336 - 245760 \cos(4r) - 20480 \cos(8r))^2 - \\
& 2097152(126 - 210 \cos(4r) + 120 \cos(8r) - 45 \cos(12r) + 10 \cos(16r) - \cos(20r))}) \\
& - \\
& \frac{1}{2097152 \log(2)} \\
& (782336 + 245760 \cos(4r) + 20480 \cos(8r) + \\
& \sqrt{((-782336 - 245760 \cos(4r) - 20480 \cos(8r))^2 - \\
& 2097152(126 - 210 \cos(4r) + 120 \cos(8r) - 45 \cos(12r) + 10 \cos(16r) - \cos(20r))}) \\
& \log(\\
& \frac{1}{2097152} (782336 + 245760 \cos(4r) + 20480 \cos(8r) + \\
& \sqrt{((-782336 - 245760 \cos(4r) - 20480 \cos(8r))^2 - \\
& 2097152(126 - 210 \cos(4r) + 120 \cos(8r) - 45 \cos(12r) + 10 \cos(16r) - \cos(20r))}) \\
& - \\
& \frac{5 \cos^8(r) \log\left(\frac{1}{2} \cos^8(r) \sin^2(r)\right) \sin^2(r)}{2 \log(2)} - \frac{5 \cos^6(r) \log\left(\frac{1}{2} \cos^6(r) \sin^4(r)\right) \sin^4(r)}{\log(2)} \\
& \frac{5 \cos^4(r) \log\left(\frac{1}{2} \cos^4(r) \sin^6(r)\right) \sin^6(r)}{\log(2)} - \frac{5 \cos^2(r) \log\left(\frac{1}{2} \cos^2(r) \sin^8(r)\right) \sin^8(r)}{2 \log(2)}
\end{aligned}$$

(3.46)

3.4.3. Eigenvalores no nulos de las matrices de densidad de los sistemas pentapartita W-class

Tabla 3.8: Eigenvalores de las matrices de densidad de los sistemas W-class en marcos de referencia no inerciales

Matrices de densidad	Eigenvalores
ρ_{ABCDE_1}	$\lambda_{31} = \frac{1}{5}(-2)(\cos(2r) - 1)$ $\lambda_{32} = \frac{1}{5}(2 \cos(2r) + 3)$
$\rho_{ABCD_1E_1}$	$\lambda_{29} = \frac{1}{40}(-8 \cos(2r) - 3 \cos(4r) + 11)$ $\lambda_{30} = \frac{1}{40}(-3)(\cos(4r) - 1)$ $\lambda_{31} = \frac{3}{40}(-4 \cos(2r) + \cos(4r) + 3)$ $\lambda_{32} = \frac{1}{40}(20 \cos(2r) + 3 \cos(4r) + 17)$
$\rho_{ABC_1D_1E_1}$	$\lambda_{25} = \frac{1}{80}(\cos(2r) - 10 \cos(4r) - \cos(6r) + 10)$ $\lambda_{26} = \frac{1}{80}(\cos(2r) - 4 \cos(4r) - \cos(6r) + 4)$ $\lambda_{27} = \frac{1}{80}(\cos(2r) - 4 \cos(4r) - \cos(6r) + 4)$ $\lambda_{28} = \frac{1}{80}(-15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) - \cos(6r) + 10)$ $\lambda_{29} = \frac{1}{80}(-\cos(2r) - 2 \cos(4r) + \cos(6r) + 2)$ $\lambda_{30} = \frac{1}{80}(-\cos(2r) - 2 \cos(4r) + \cos(6r) + 2)$ $\lambda_{31} = \frac{1}{80}(-25 \cos(2r) + 4 \cos(4r) + \cos(6r) + 20)$ $\lambda_{32} = \frac{1}{80}(39 \cos(2r) + 12 \cos(4r) + \cos(6r) + 28)$
$\rho_{AB_1C_1D_1E_1}$	$\lambda_{17} = \frac{1}{640}(28 \cos(2r) - 52 \cos(4r) - 28 \cos(6r) - \cos(8r) + 53)$ $\lambda_{18} = \lambda_{19} = \lambda_{20} = \frac{1}{640}(12 \cos(2r) - 20 \cos(4r) - 12 \cos(6r) - \cos(8r) + 21)$ $\lambda_{21} = \frac{1}{640}(-244 \cos(2r) + 92 \cos(4r) - 12 \cos(6r) - \cos(8r) + 165)$ $\lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \frac{1}{640}(-4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) + 4 \cos(6r) - \cos(8r) + 5)$ $\lambda_{25} = \frac{1}{640}(296 \cos(2r) + 124 \cos(4r) + 24 \cos(6r) + \cos(8r) + 195)$

$$\begin{aligned}
\lambda_{26} &= \lambda_{27} = \lambda_{28} = \lambda_{29} = \lambda_{30} = \lambda_{31} = \\
&\frac{1}{80} \text{Root} [8388608 \#1^6 + \#1^5 (50331648 \cos(2r) + 125829120 \cos(4r) - \\
&50331648 \cos(6r) + \\
&-6291456 \cos(8r) - 119537664) + \#1^4 (-481296384 \cos(2r) + \\
&-1382547456 \cos(4r) + 745537536 \cos(6r) + 316932096 \cos(8r) + \\
&-279969792 \cos(10r) + 11010048 \cos(12r) + 15728640 \cos(14r) + \\
&+983040 \cos(16r) + 1053622272) + \#1^3 (2171338752 \cos(2r) + \\
&+6905266176 \cos(4r) - 4018929664 \cos(6r) - 2324348928 \cos(8r) + \\
&+2412380160 \cos(10r) + 98500608 \cos(12r) - 609878016 \cos(14r) + \\
&+106266624 \cos(16r) + 47054848 \cos(18r) - 7667712 \cos(20r) + \\
&-1966080 \cos(22r) - 81920 \cos(24r) - 4777934848) + \\
&\#1^2 (-4560543744 \cos(2r) - \\
&16352907264 \cos(4r) + 9391104000 \cos(6r) + 7005321216 \cos(8r) + \\
&-7196958720 \cos(10r) - 1013428224 \cos(12r) + 2929876992 \cos(14r) + \\
&-405298176 \cos(16r) - 617078784 \cos(18r) + 189788160 \cos(20r) + \\
&+55861248 \cos(22r) - 23623680 \cos(24r) - 2383872 \cos(26r) + \\
\rho_{AB_1C_1D_1E_1} &+872448 \cos(28r) + 122880 \cos(30r) + 3840 \cos(32r) + 10599271680) + \\
&+\#1 (3607650816 \cos(2r) + 16021941504 \cos(4r) - 8138605056 \cos(6r) + \\
&-8649303744 \cos(8r) + 7579825152 \cos(10r) + 2581464576 \cos(12r) + \\
&-4289639424 \cos(14r) - 317184 \cos(16r) + 1532869632 \cos(18r) + \\
&-336179712 \cos(20r) - 324369408 \cos(22r) + 131680032 \cos(24r) + \\
&+32823552 \cos(26r) - 21964416 \cos(28r) - 567552 \cos(30r) + \\
&+1416384 \cos(32r) + 16128 \cos(34r) - 39552 \cos(36r) + \\
&-3840 \cos(38r) - 96 \cos(40r) - 9728697792) - 1013362272 \cos(2r) + \\
&-5460586704 \cos(4r) + 2424675296 \cos(6r) + 3412.98744 \cos(8r) + \\
&-2554662240 \cos(10r) - 1445990192 \cos(12r) + 1767836640 \cos(14r) + \\
&+307165935 \cos(16r) - 857637648 \cos(18r) + 61393704 \cos(20r) + \\
&+289752144 \cos(22r) - 75524348 \cos(24r) - 64251408 \cos(26r) + \\
&+28810200 \cos(28r) + 7916240 \cos(30r) - 5914878 \cos(32r) + \\
&-222576 \cos(34r) + 628344 \cos(36r) - 45264 \cos(38r) + \\
&-26796 \cos(40r) + 1040 \cos(42r) + 648 \cos(44r) + 48 \cos(46r) + \\
&+ \cos(48r) + 3174435342\&, 6] \\
\lambda_{32} &= \frac{\sin^8(r)}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \lambda_2 &= \frac{1}{1024} \left(382 + 120 \cos(4r) + 10 \cos(8r) + \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} \sqrt{(\cos(4r) + 7)^2 (511 \cos(4r) + 62 \cos(8r) + \cos(12r) + 1474)} \right) \\
\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \\
\rho_{A_1 B_1 C_1 D_1 E_1} \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{16} = \lambda_{17} &= \frac{1}{2} \sin^4(r) \cos^6(r) \\
\lambda_{18} = \lambda_{19} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{26} = \lambda_{27} = \\
\frac{1}{2} \sin^6(r) \cos^4(r) \\
\lambda_{28} = \lambda_{29} = \lambda_{30} = \lambda_{31} = \lambda_{32} &= \frac{1}{2} \sin^8(r) \cos^2(r)
\end{aligned}$$

Ahora se escriben las expresiones analíticas de las entropías de los sistemas pentapartita W-class para 1, 2, 3, 4 y todos los observadores acelerados.

$$\frac{1}{S} = \frac{2(\cos(2r) - 1) \log\left(\frac{1}{5}(-2)(\cos(2r) - 1)\right)}{5 \log(2)} - \frac{(2 \cos(2r) + 3) \log\left(\frac{1}{5}(2 \cos(2r) + 3)\right)}{5 \log(2)} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{S} &= \frac{1}{40 \log(2)} 3(\cos(4r) - 1) \log\left(\frac{1}{40}(-3)(\cos(4r) - 1)\right) + \\
&\quad - \frac{1}{40 \log(2)} 3(-4 \cos(2r) + \cos(4r) + 3) \log\left(\frac{3}{40}(-4 \cos(2r) + \cos(4r) + 3)\right) + \\
&\quad - \frac{1}{40 \log(2)} (20 \cos(2r) + 3 \cos(4r) + 17) \log\left(\frac{1}{40}(20 \cos(2r) + 3 \cos(4r) + 17)\right) + \\
&\quad - \frac{1}{40 \log(2)} (-8 \cos(2r) - 3 \cos(4r) + 11) \log\left(\frac{1}{40}(-8 \cos(2r) - 3 \cos(4r) + 11)\right)
\end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{S} = & -\frac{\sin^8(r) \log(\sin^8(r))}{\log(2)} - \frac{1}{80 \log(2)} (-4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) + 4 \cos(6r) + \\
& - \cos(8r) + 5) \log \left(\frac{1}{80} (-4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) + 4 \cos(6r) - \cos(8r) + 5) \right) + \\
& - \frac{1}{80 \log(2)} (4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) - \cos(8r) + 5) \log \left(\frac{1}{80} (4 \cos(2r) - 4 \cos(4r) + \right. \\
& \left. - 4 \cos(6r) - \cos(8r) + 5) \right) + \frac{1}{160 \log(2)} 3(-4 \cos(2r) + 4 \cos(4r) + 4 \cos(6r) + \\
& + \cos(8r) - 5) \log \left(\frac{1}{640} (-3)(-4 \cos(2r) + 4 \cos(4r) + 4 \cos(6r) + \cos(8r) - 5) \right) + \\
& - \frac{1}{128 \log(2)} (56 \cos(2r) + 28 \cos(4r) + 8 \cos(6r) + \cos(8r) + 35) \log \left(\frac{1}{128} (56 \cos(2r) + \right. \\
& \left. 28 \cos(4r) + 8 \cos(6r) + \cos(8r) + 35) \right) + \frac{1}{160 \log(2)} 3(4 \cos(2r) + 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) + \\
& + \cos(8r) - 5) \log \left(\frac{1}{640} (-3)(4 \cos(2r) + 4 \cos(4r) - 4 \cos(6r) + \cos(8r) - 5) \right) + \\
& - \frac{1}{40 \log(2)} (-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \log \left(\frac{1}{160} (-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \right) + \\
& - \frac{1}{128 \log(2)} (-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \log \left(\frac{1}{640} (-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \right) + \\
& - \frac{1}{640 \log(2)} 9(-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \log \left(\frac{9}{640} (-4 \cos(4r) + \cos(8r) + 3) \right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Se contrasta el comportamiento de la entropía tanto en los sistemas pentapartita GHZ como en los W-class como se muestra en la figura 3.18.

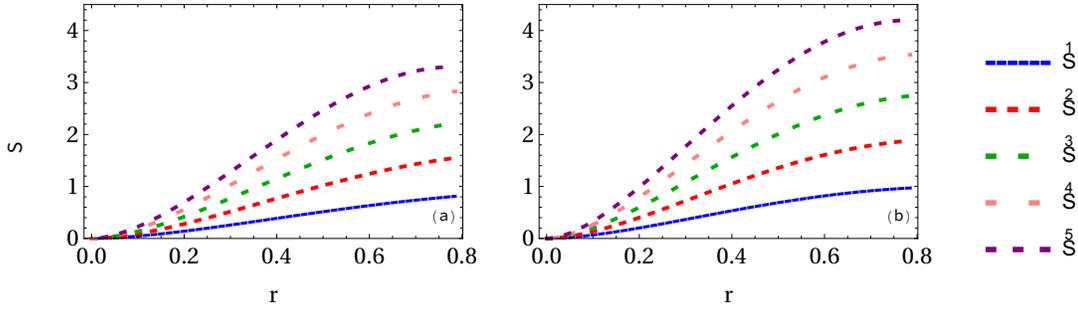


Figura 3.18: (a) Entropía de los sistemas GHZ en marcos de referencia no inerciales. Cada gráfica de abajo hacia arriba representa cuando un observador es acelerado ($\overset{1}{S}$), dos observadores acelerados ($\overset{2}{S}$), tres observadores ($\overset{3}{S}$), cuatro ($\overset{4}{S}$) y todos los observadores siendo no inerciales ($\overset{5}{S}$).

La entropía también confirma los resultados obtenidos mediante los entrelazamientos 1-4 y el residual total π_5 y Π_5 acerca de que el sistema desgasta la propiedad cuántica de entrelazamiento al aumentar su aceleración hasta infinito. Esto es, que las matrices de densidad se vuelven cada vez más separables, los sistemas cuánticos se vuelven clásicos. Por último, se destaca la mayor cantidad de entropía en los sistemas W-class, que resulta de que las transformaciones de Rindler inducen la creación de más posibles estados en la configuración del vector de estado del sistema pentapartita, por lo que hay mayor aleatoriedad y desorden en este tipo de sistemas.

3.5. Medidas de entrelazamiento para estados GHZ n-partita en un marco de referencia no inercial

Acorde a la experiencia que se logró con los experimentos realizados con estados GHZ pentapartita en marcos de referencia no inerciales en el cálculo de las medidas: enredo $1-(n-1)$, entrelazamiento residual total y la entropía. Se estudia el comportamiento de estados GHZ con tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados. De la misma manera como se realizó solo con cinco cúbits, se estudian las medidas de entrelazamiento como función de un parámetro $r \in [0, \pi/4]$ asociado a la aceleración y también como

función del número de observadores no inerciales.

Se desarrollaron en MATHEMATICA fórmulas para hacer el cálculo de los vectores de estado, los productos externos, las trazas y las traspuestas de las matrices de densidad. Esto ya que el software de QUANTUM NOTATION presenta fallas en los productos matriciales de vectores de más de 65536 entradas. Por continuidad de los argumentos de este trabajo, dicho material se excluye del trabajo principal pero puede ser revisado en el Apéndice A.1.

3.5.1. Forma de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial

Las medidas de entrelazamiento de estados GHZ en un marco de referencia no inercial pueden ser generalizadas. Esto por medio del análisis de la forma de las matrices de densidad de los estados GHZ. Comenzamos por ver que el vector de estado en general tiene la forma.

$$|\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1 0_2 \dots 0_n\rangle + |1_1 1_2 \dots 1_n\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \quad (3.50)$$

donde $|\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n}$ tiene 2^n entradas y solo dos terminos no nulos. Después de que el n -esimo observador es acelerado, el vector columna se vuelve

$$|\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n_I,n_{II}} = \left(\frac{\cos(r)}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sin(r)}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T \quad (3.51)$$

donde $|\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n}$ tiene 2^{n+1} entradas y aumentan a tres el número de términos no nulos. Mientras más cúbits son acelerados, el tamaño del vector columna aumenta a $2^{(n+q)}$ donde $2^q + 1$ son términos no nulos de la forma $\cos^\alpha(r) \sin^\beta(r)$ que están separados por bloques de 2^q ceros de diferente tamaño. Es importante recordar que n es el número de cúbits entrelazados y q es la cantidad de cúbits acelerados y por ello no inerciales. Por ejemplo,

un sistema heptapartita con cuatro cúbits no inerciales es

$$\begin{aligned}
 |GHZ\rangle_{1,2,3,4_I,4_{II},5_I,5_{II},6_I,6_{II},7_I,7_{II}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^4(r), \underbrace{0}_2, \cos^3(r) \sin(r), \underbrace{0}_8, \right. \\
 & \cos^3(r) \sin(r), \underbrace{0}_2, \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_{32}, \cos^3(r) \sin(r), \underbrace{0}_2, \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_8, \\
 & \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_2, \cos(r) \sin^3(r), \underbrace{0}_{128}, \cos^3(r) \sin(r), \underbrace{0}_2, \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_8, \\
 & \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_2, \cos(r) \sin^3(r), \underbrace{0}_{32}, \cos^2(r) \sin^2(r), \underbrace{0}_2, \cos(r) \sin^3(r), \underbrace{0}_8, \\
 & \left. \cos(r) \sin^3(r), \underbrace{0}_2, \sin^4(r), 0, 0, \dots, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0}_{85} \right)^T
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde el índice bajo los ceros indica el número de ceros reales dentro de este bloque de ceros en particular. Los bloques de ceros siguen una secuencia. Bloques de 2 ceros se alternan cada 2 términos, bloques de 8 ceros se alternan cada 4 términos, bloques de 32 ceros se alternan cada 8 términos a así se sigue. Es decir, se observa que las longitudes de los bloques de ceros siguen la secuencia $2^1, 2^3, \dots, 2^{(2q-1)}$. Que se alternan cada $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{(q-1)}$ términos, respectivamente. El número de ceros después del término $1/\sqrt{2}$ también presenta una regularidad. Esta puede ser calculada con la siguiente fórmula

$$\sum_{i=0}^{q-1} 2^{2i} \tag{3.53}$$

Veamos ahora los términos de la forma $\cos^\alpha(r) \sin^\beta(r)$. Estos presentan una regularidad en las potencias α y β . La secuencia de las potencias de los cosenos se puede obtener viendo que para $q = 1$, estas son $\{1, 0\}$, para $q = 2$ son $\{2, 1, 1, 0\}$, para $q = 3$ son $\{3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0\}$, para $q = 4$ se puede definir definir la matriz

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

donde es posible leer la secuencia correcta de las potencias de coseno. Para $q = 5$ se definen

$$M^{(5)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

para $q = 6$ son $\{M^{(6)}, M^{(5)}, M^{(5)}, M^{(4)}\}$, para $q = 7$ estas son $\{M^{(7)}, M^{(6)}, M^{(6)}, M^{(5)}, M^{(6)}, M^{(5)}, M^{(5)}, M^{(4)}\}$, y para $q = 8$ se repite una nueva secuencia de matrices de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} M^{(8)} & M^{(7)} & M^{(7)} & M^{(6)} \\ M^{(7)} & M^{(6)} & M^{(6)} & M^{(5)} \\ M^{(7)} & M^{(6)} & M^{(7)} & M^{(5)} \\ M^{(6)} & M^{(5)} & M^{(5)} & M^{(4)} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

donde es posible leer la correcta secuencia de las potencias de coseno. Es fácil ver que este patrón se sigue para valores más grandes de q . Después, la secuencia de las potencias de seno se puede obtener restando de la cantidad $2q$ cada correspondiente término en los cosenos.

Tal como se realizó en el caso pentapartita, se traza sobre los estados de antipartícula en la región II a partir de cada matriz de densidad $\rho_{1,2,\dots,n_I,n_{II}} = |\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n_I,n_{II}} \langle \text{GHZ}|$. La traza parcial mapea todos los términos no nulos sobre la diagonal de una matriz de tamaño $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$. En otras palabras este procedimiento remueve todos los bloques de ceros y la mayoría de las coherencias de la matriz de densidad $\rho_{1,2,\dots,n}$. Por lo tanto, la forma general de la matriz de densidad reducida es

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos^{2q}(r)}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\cos^q(r)}{2} \\ 0 & \frac{\cos^{M_{i,j}^{(q)}}(r) \sin^{2q-M_{i,j}^{(q)}}(r)}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin^{2q}(r)}{2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\cos^q(r)}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

donde $M_{i,j}^{(q)}$ se refiere al término i, j de la matriz M^q , que sigue la secuencia de las potencias de los cosenos. Debe ser notado que los términos $\cos^q(r)/2$ en las esquinas son una propiedad de este tipo de matrices de densidad de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial.

3.5.2. Negatividad de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial

En continuación del caso pentapartita, para un caso general de estados GHZ no inerciales comenzamos suponiendo que el n -ésimo cúbit es no inercial con aceleración uniforme en el plano (t, z) mientras que los cúbits $1, 2, \dots, (n-1)$ se mantienen estacionarios. Después es acelerado el siguiente cúbit, v.gr. el cúbit $(n-1)$ -ésimo y también el n -ésimo se mueven con aceleración uniforme mientras que los otros observadores se mantienen inerciales. Para ilustrar este caso se hace la transformación a coordenadas de Rindler del estado (3.50)). Esto es, que cuando el n -ésimo cúbit del estado GHZ es no inercial, la expresión del vector de estado correspondiente es:

$$|\text{GHZ}\rangle_{1,2,\dots,n_{\text{I}},n_{\text{II}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(r) |0_{\text{I}}0_{\text{II}} \dots 0_{n_{\text{I}}}0_{n_{\text{II}}}\rangle + \sin(r) |0_{\text{I}}0_{\text{II}} \dots 1_{n_{\text{I}}}1_{n_{\text{II}}}\rangle + |1_{\text{I}}1_{\text{II}} \dots 1_{n_{\text{I}}}0_{n_{\text{II}}}\rangle \right) \quad (3.58)$$

De manera similar, se aplica la transformación a coordenadas de Rindler de los demás cúbits cuando estos se consideran no inerciales.

Las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 muestran la comparación entre negatividades enredo 1-4 de estados GHZ de $n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cúbits entrelazados cuando uno, dos y tres observadores son no inerciales. Se observa que en todos los casos $N_{1-(n-1)}$ es dependiente del parámetro $r \in [0, \infty]$ asociado a la aceleración, pero también del número q de observadores acelerados. Sin embargo, nunca del número n de cúbits entrelazados.

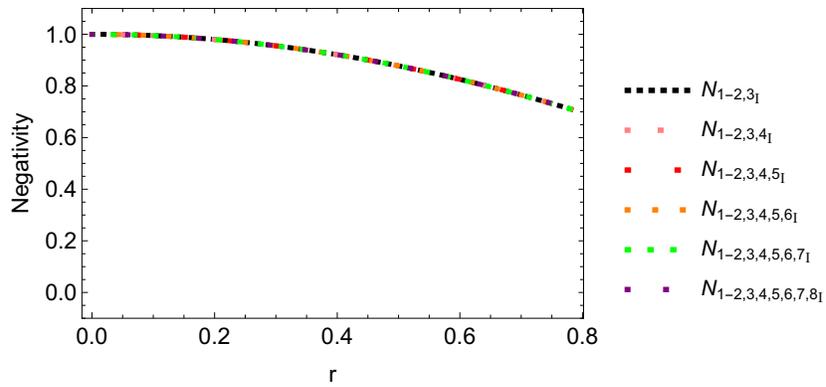


Figura 3.19: Comparación de los enredos $1-(n - 1)$ de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando un observador es no inercial.

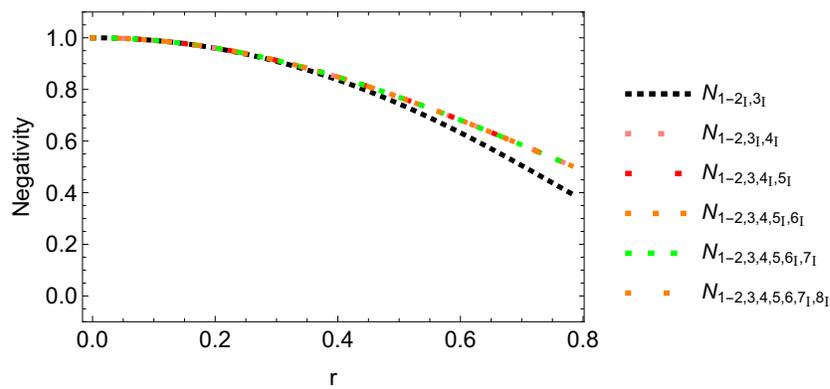


Figura 3.20: Comparación de los enredos $1-(n - 1)$ de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando dos observadores son no inerciales .

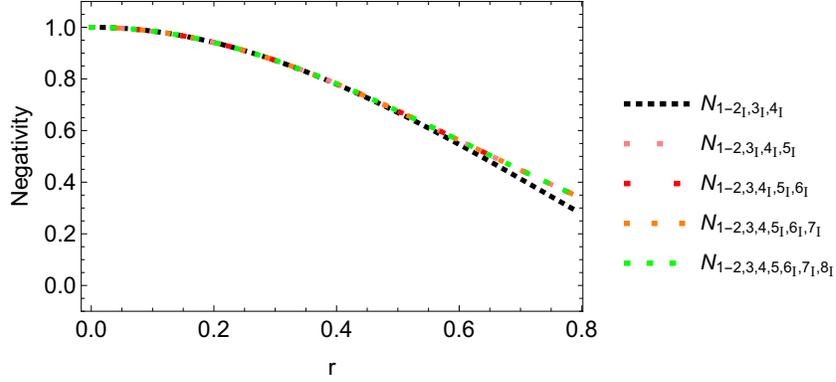


Figura 3.21: Comparación de los enredos $1-(n-1)$ de estados GHZ de cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados cuando tres cúbits son no inerciales.

Las expresiones analíticas de estas gráficas son

$$N_{1-2,3_I} = N_{1-2,3,4_I} = N_{1-2,3,4,5_I} = N_{1-2,3,4,5,6_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7,8_I} = \cos(r) \quad (3.59)$$

$$N_{1-2_I,3_I} = \frac{1}{16} \left| 8 \sin^4(r) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{200 \cos(2r) + 92 \cos(4r) - 8 \cos(6r) + \cos(8r) + 227} \right|; \quad (3.60)$$

$$N_{1-2,3,4_I} = N_{1-2,3,4,5_I} = N_{1-2,3,4,5,6_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7,8_I} = \cos^2(r)$$

$$N_{1-2_I,3_I,4_I} = \frac{1}{64} \left| 32 \sin^6(r) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3048 \cos(2r) + 2031 \cos(4r) + 36 \cos(6r) + 66 \cos(8r) - 12 \cos(10r) + \cos(12r) + 3022} \right|$$

$$N_{1-2,3,4,5_I} = N_{1-2,3,4,5,6_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7_I} = N_{1-2,3,4,5,6,7,8_I} = \cos^3(r) \quad (3.61)$$

de donde se puede seguir con base en los resultados de estos experimentos que:

Proposición acerca de las negatividades en estados GHZ n -partita en un marco de referencia no inercial. *Las negatividades enredo $N_{1-(n-1)}$ dependen del número de cúbits no inerciales de tal manera que siempre que exista al menos un observador inercial entre los $(n-1)$ modos, las funciones de negatividad serán las mismas, esto sin importar el número de cúbits entrelazados.*

3.5.3. Entrelazamiento residual total en estados GHZ n-partita

En analogía a los experimentos realizados con sistemas pentapartita, también se estudia la medida de entrelazamiento residual total de los estados GHZ n-partita no inerciales. Esto es, se calculó el entrelazamiento residual total π -tangle en sus versiones aritmética y geométrica.

Entrelazamiento residual total aritmético

$$\pi_n = \frac{(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n)}{n} \quad (3.62)$$

Entrelazamiento residual total geométrico

$$\Pi_n = (\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_n)^{\frac{1}{n}} \quad (3.63)$$

donde los entrelazamientos residuales parciales son obtenidos por una formula similar a la usada en el caso pentapartita, esta es:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= N_{1-23\dots j\dots n}^2 - N_{1-2}^2 - N_{1-3}^2 - \dots - N_{1-j}^2 - \dots - N_{1-n}^2 & j \neq 1 \\ \pi_2 &= N_{2-13\dots j\dots n}^2 - N_{2-1}^2 - N_{2-3}^2 - \dots - N_{2-j}^2 - \dots - N_{2-n}^2 & j \neq 2 \\ &\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \pi_i &= N_{i-12\dots j\dots n}^2 - N_{i-1}^2 - N_{i-3}^2 - \dots - N_{i-j}^2 - \dots - N_{i-n}^2 & j \neq i \\ &\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \pi_n &= N_{n-12\dots(n-1)}^2 - N_{n-1}^2 - N_{n-2}^2 - \dots - N_{n-j}^2 - \dots - N_{n-(n-1)}^2 & j \neq n \end{aligned} \quad (3.64)$$

que es una expresión basada en (Oliveira and Ramos, 2010). Donde cabe destacar lo remarcado en (Dong et al., 2022), acerca de que las negatividades enredo N_{1-1} , todas estas son cero para el caso de los estados GHZ.

Las figuras 3.22, 3.23 y 3.24 muestran una comparación del entrelazamiento total residual π_n y Π_n de los estados GHZ de $n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cúbits entrelazados cuando uno, dos y tres observadores se vuelven no inerciales. Claramente, estas son funciones del parámetro

$r \in [0, \pi/4]$ asociado a la aceleración, del número n de cúbits entrelazados pero también hay una dependencia del parámetro q de observadores acelerados en el sistema. Es de notar que en los casos estudiados, la diferencia entre el promedio aritmético y geométrico es muy pequeña, tal que puede ser ignorada.

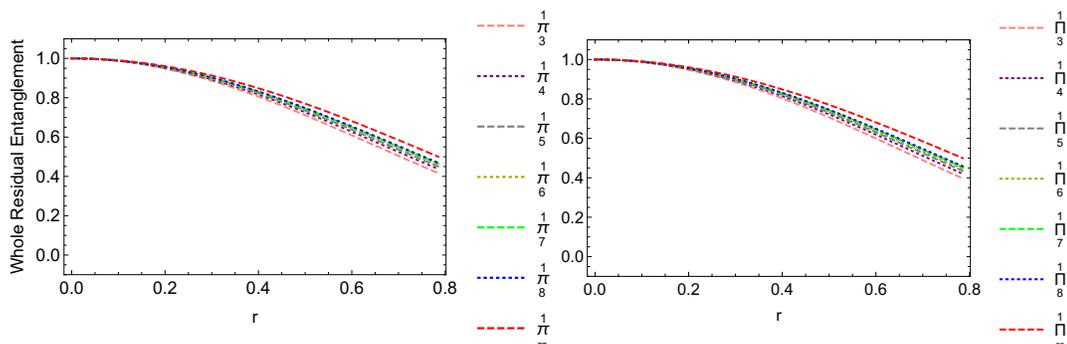


Figura 3.22: Comparación de el entrelazamiento residual total π_n y Π_n de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados cuando un observador es no inercial. Las línea discontinua roja corresponde al límite $\cos^2(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

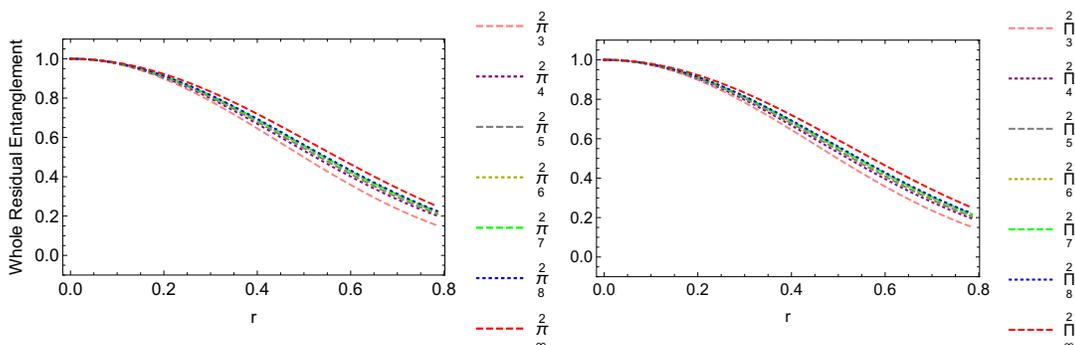


Figura 3.23: Comparación del entrelazamiento residual total π_n y Π_n de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados dos observadores son no inerciales. La línea discontinua roja corresponde al límite $\cos^4(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

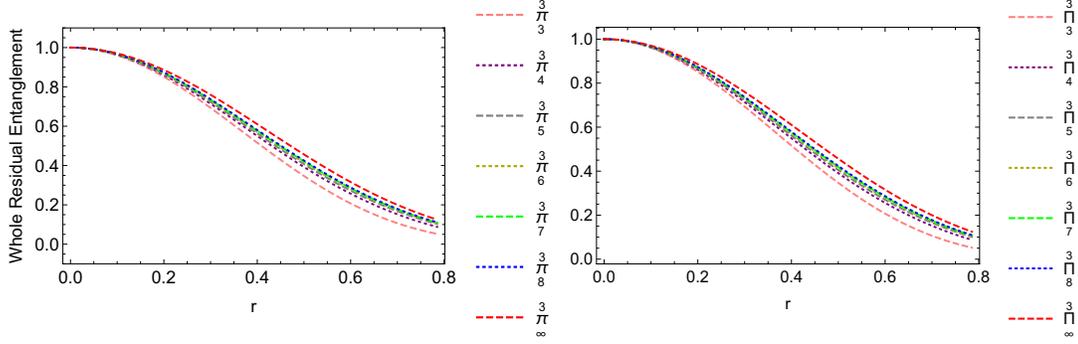


Figura 3.24: Comparación del entrelazamiento residual total π y Π de estados GHZ de $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ cúbits entrelazados cuando tres observadores son no inerciales. La línea roja discontinua es el límite $\cos^6(r)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Expresiones analíticas de estas gráficas son dadas en adelante.

$$\frac{1}{n}\pi = \cos^2(r) \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \cos^2(r) \right), \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{n}\Pi = \left(\cos^{\left(\frac{2n+2}{n}\right)}(r) \right), \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.66)$$

$$\frac{2}{n}\pi = \cos^4(r) \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{2n} \left(-\sin^2(r) + \sqrt{\sin^4(r) + 4} \right)^2 \right), \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.67)$$

$$\frac{2}{n}\Pi = \cos^4(r) \left(\frac{\sqrt{\sin^4(r) + 4} + \sin^2(r)}{2} \right)^{4/n}, \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.68)$$

$$\frac{3}{n}\pi = \cos^6(r) \left(\frac{n-3}{n} + \frac{3}{4n} \left(-\sin^2(r) \cos^4(r) + \sqrt{\sin^4(r) \cos^2(r) + 4} \right)^2 \right), \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.69)$$

$$\frac{3}{n}\Pi = \cos^6(r) \left(\frac{\sin^2(r) \cos(r) - \sqrt{\sin^4(r) \cos^2(r) + 4}}{2} \right)^{6/n}, \quad n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (3.70)$$

donde los superíndices sobre π y Π se refieren al número q de observadores no inerciales en el estado, y los subíndices se refieren al número de cúbits entrelazados del sistema.

A partir de las fórmulas previas se puede inferir que:

Proposición acerca del entrelazamiento residual total de estados GHZ en un marco de referencia no inercial. *El entrelazamiento residual total de un estado GHZ con q observadores no inerciales puede incrementarse hasta $\cos^{2q}(r)$ por medio de aumentar el número de sus cúbits inerciales en el sistema.*

O sea, si aumentamos la cantidad de cúbits que comparten el entrelazamiento para una q fija, esto le da robustez al estado GHZ n -partita.

Además, como se puede apreciar en la figura 3.25 los entrelazamientos residual total $\frac{5}{\pi}$ y $\frac{8}{\pi}$ son muy próximos a $\cos^{10}(r)$ y a $\cos^{16}(r)$ respectivamente. Es decir, que las cantidades $|\frac{5}{\pi} - \cos^{10}(r)|$ y $|\frac{8}{\pi} - \cos^{16}(r)|$ tienden a cero muy rápido cuando q aumenta, lo que en términos prácticos significa que el entrelazamiento residual total de cualquier cantidad de cúbits no inerciales en estos estados GHZ queda confinada por estas curvas.

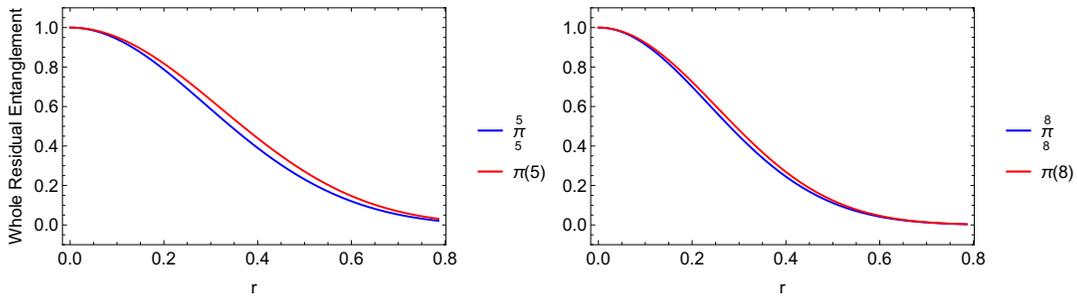


Figura 3.25: Comparación del entrelazamiento residual total de estados GHZ totalmente no inerciales $\frac{5}{\pi}$ y $\frac{8}{\pi}$ contra sus cotas superiores $\cos^{10}(r)$ y $\cos^{16}(r)$ respectivamente. Se puede apreciar que en ambos casos, las gráficas azul y roja se vuelven más próximas conforme aumenta el número q de observadores no inerciales.

Otra exploración que se realizó, fue ver como es el entrelazamiento en aceleración infinita ($r = \pi/4$) como función del número de observadores no inerciales. Esto se realizó, utilizando la aproximación a $\cos^{2q}(r)$ de la medida de entrelazamiento residual total. El resultado se puede ver en la figura 3.26, donde para $q = 4$ se ve que el entrelazamiento es de menos del 10% del entrelazamiento totalmente inercial. Todavía peor para $q = 7$, este es de menos del 1%.

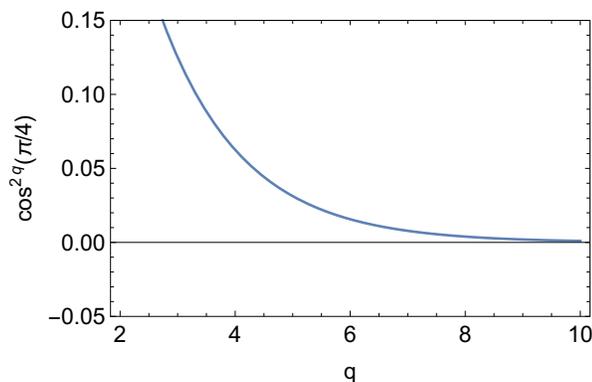


Figura 3.26: Comparación de la aproximación $\cos^{2q}(r)$ de varios estados GHZ como función del número de observadores no inerciales en aceleración infinita ($r = \pi/4$).

Hay que mencionar que el diseño de protocolos cuánticos deberá considerar que el entrelazamiento con más de siete cúbits no inerciales es demasiado bajo, tanto que tareas tales como la destilación y la corrección de errores cuánticos podrían estar comprometidas (Kozłowski et al., 2020).

3.5.4. Entropía de los estados GHZ n-partita en un marco de referencia no inercial

Siguiendo con la metodología aplicada en el estudio de los estados GHZ n-partita en un marco de referencia no inercial, se calculó la entropía de sistemas entrelazados con $n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cúbits entrelazados, donde se van haciendo de uno en uno, no inerciales a los observadores de estos estados. Las figuras 3.27, 3.28 3.29 muestran los resultados correspondientes a los experimentos descritos. Se encuentra que estas funciones dependen del número de cúbits no inerciales, así como del parámetro $r \in [0, \pi/4]$ asociado a la aceleración, sin depender del número de cúbits entrelazados. El aumento en las funciones de entropía esta asociado a l grado de decoherencia en los estados GHZ cuando más y más cúbits se vuelven no inerciales en el sistema.

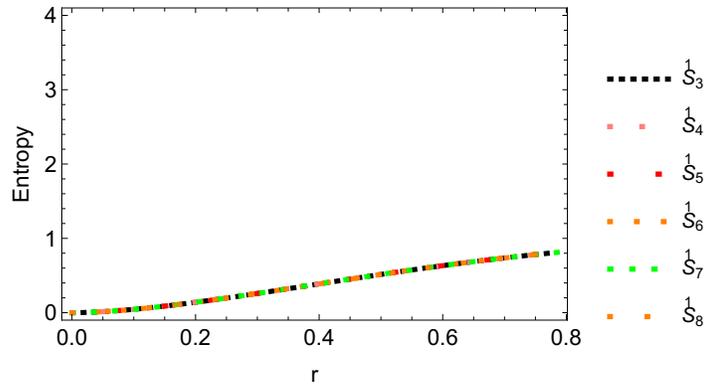


Figura 3.27: Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando uno de estos es no inercial.

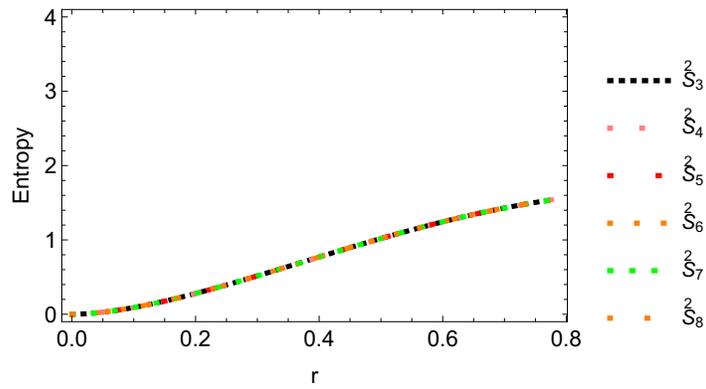


Figura 3.28: Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando dos de estos son no inerciales.

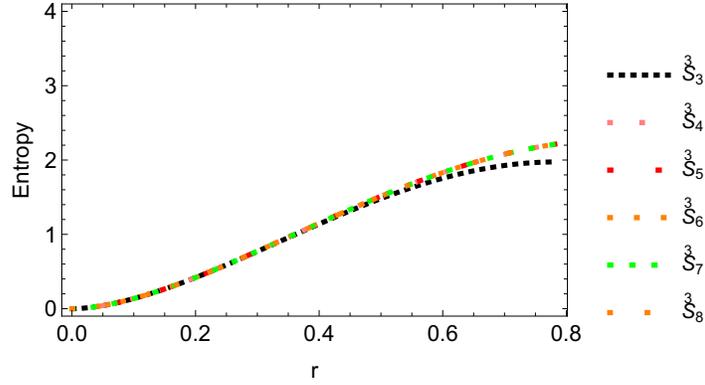


Figura 3.29: Comparación de las entropías de estados GHZ de tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho cúbits entrelazados, cuando tres son no inerciales.

donde, las expresiones analíticas de estas gráficas se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{S}_3 = \overset{1}{S}_4 = \overset{1}{S}_5 = \overset{1}{S}_6 = \overset{1}{S}_7 = \\
 \overset{1}{S}_8 = -\frac{1}{4 \log(2)} (\cos(2r) + 3) \log \left(\frac{1}{4} (\cos(2r) + 3) \right) + \\
 -\frac{2}{4 \log(2)} \sin^2(r) \log \left(\frac{\sin^2(r)}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{S}_3 = \overset{2}{S}_4 = \overset{2}{S}_5 = \overset{2}{S}_6 = \overset{2}{S}_7 = \\
 \overset{2}{S}_8 = -\frac{1}{16 \log(2)} (4 \cos(2r) + \cos(4r) + 11) \log \left(\frac{1}{16} (4 \cos(2r) + \cos(4r) + 11) \right) + \\
 -\frac{16}{16 \log(2)} (\sin^2(r) \cos^2(r)) \log \left(\frac{1}{2} \sin^2(r) \cos^2(r) \right) + \\
 -\frac{8}{16 \log(2)} \sin^4(r) \log \left(\frac{\sin^4(r)}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
{}^3S_3 &= -\frac{1}{128 \log(2)} \left(12 \cos(4r) + \sqrt{2} \sqrt{639 \cos(4r) + 30 \cos(8r) + \cos(12r) + 1378 + 52} \right) \\
&\quad \log \left(\frac{1}{128} \left(12 \cos(4r) + \sqrt{2} \sqrt{639 \cos(4r) + 30 \cos(8r) + \cos(12r) + 1378 + 52} \right) \right) - \\
&\quad \frac{1}{128 \log(2)} \left(12 \cos(4r) - \sqrt{2} \sqrt{639 \cos(4r) + 30 \cos(8r) + \cos(12r) + 1378 + 52} \right) \\
&\quad \log \left(\frac{1}{128} \left(12 \cos(4r) - \sqrt{2} \sqrt{639 \cos(4r) + 30 \cos(8r) + \cos(12r) + 1378 + 52} \right) \right) - \\
&\quad \frac{3}{2 \log(2)} \sin^2(r) \cos^4(r) \log \left(\frac{1}{2} \sin^2(r) \cos^4(r) \right) - \\
&\quad \frac{3}{2 \log(2)} \sin^4(r) \cos^2(r) \log \left(\frac{1}{2} \sin^4(r) \cos^2(r) \right) \\
{}^3S_4 &= {}^3S_5 = {}^3S_6 = {}^3S_7 = \\
{}^3S_8 &= -\frac{1}{64 \log(2)} (15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) + \cos(6r) + 42) \cdot \\
&\quad \log \left(\frac{1}{64} (15 \cos(2r) + 6 \cos(4r) + \cos(6r) + 42) \right) + \\
&\quad -\frac{96}{64 \log(2)} \sin^4(r) \cos^2(r) \log \left(\frac{1}{2} \sin^4(r) \cos^2(r) \right) + \\
&\quad -\frac{96}{64 \log(2)} \sin^2(r) \cos^4(r) \log \left(\frac{1}{2} \sin^2(r) \cos^4(r) \right) + \\
&\quad -\frac{32}{64 \log(2)} \sin^6(r) \log \left(\frac{\sin^6(r)}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

donde los subíndices debajo de S corresponden al número de cúbits entrelazados y el superíndice al número de cúbits no inerciales.

Se infiere con base en la regularidad de los estados GHZ n -partita en un marco de

referencia no inercial que la expresión general para las funciones de la entropía es:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_n^q = & -\frac{1}{2^{2q} \log(2)} \left(\left((2^{2q-1} + a_0) + \sum_{i=1}^q a_i \cos(2ir) \right) \cdot \right. \\
& \left. \log \left(\frac{1}{2^{2q}} \left(a_0 + \sum_{i=1}^q \cos(2ir) \right) \right) \right) + \\
& \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (2q-1) \left(\cos^{2q-2i}(r) \sin^{2i}(r) \right) \cdot \\
& \left. \log \left(\frac{1}{2} \cos^{2q-2i}(r) \sin^{2i}(r) \right) \right), \quad q < n
\end{aligned} \tag{3.74}$$

donde $\{a_0, a_i\}$ es obtenida mediante la relación $\sin^{2q}(r) = \frac{1}{2^{2q-1}} \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \cos(2ir) \right)$.

Notar que la entropía \dot{S}_n^q de los estados GHZ es la misma siempre que al menos uno de los observadores en el sistema es inercial, es decir:

Proposición acerca de la entropía en estados GHZ en un marco de referencia no inercial *La entropía es una función del parámetro $r \in [0, \pi/4]$ asociado a la aceleración y al número de cúbits no inerciales, siendo la misma entre aquellos estados GHZ que tengan el mismo número de observadores no inerciales y siempre que exista al menos un cúbit inercial en el sistema.*

Capítulo 4

Resultados, Discusión y Conclusiones

Se encuentra a partir de los cálculos de la negatividad y el entrelazamiento residual total en los sistemas pentapartita GHZ y W-class que el entrelazamiento decrece como función del número de observadores no inerciales y también del parámetro de la aceleración r . Es valioso notar de los enredos 1-4 que el entrelazamiento es dependiente del observador de referencia. De los enredos 2-3 vemos varias situaciones que mencionamos para cumplir con la correcta caracterización de los sistemas. Para el caso con un solo observador no inercial el sistema W-class es más robusto que el GHZ. En el caso de dos observadores inerciales se presentó un comportamiento curioso en el sentido de que el entrelazamiento es mayor en los sistemas W-class con respecto a los GHZ cuando todos el par es inercial pero es menor cuando uno del par es no inercial. En el caso con tres observadores inerciales se presentan tres situaciones, el entrelazamiento en los sistemas W-class es mayor a los GHZ si al menos uno de los observadores es inercial, pero en el mismo sistema, este decrece si los dos observadores son inerciales, y en el caso donde el par es totalmente no inercial el entrelazamiento del sistema W-class es todavía menor al del sistema GHZ. En caso de cuatro observadores no inerciales vemos que el entrelazamiento es muy similar en ambos sistemas. El último caso, cuando todos los observadores son no inerciales el entrelazamiento de los pares en el sistema GHZ siempre es mayor al W-class.

Las medidas de entrelazamiento residual total π_5 y Π_5 siempre es mayor en sistemas GHZ que en los W-class. Aunque cabe remarcar que ambas medidas de entrelazamiento miden valores muy similares, a tal grado que podemos empalmar ambas gráfica y notar que

son casi idénticos. Así mismo, se concluye que esta medida de entrelazamiento respalda la idea de que el entrelazamiento de los sistemas pentapartita en marcos de referencia no inercial es dependiente del número de observadores no inerciales así como del parámetro de la aceleración r .

Las entropía por su parte sirve para confirmar la pérdida de entrelazamiento, esto de manera indirecta, ya que como bien puede verificarse por medio de los experimentos, esta aumenta conforme aumenta el número de observadores no inerciales y el parámetro de la aceleración r , lo que coincide con los resultados anteriores. Además, al revisar en la literatura, vemos que la entropía del sistema pentapartita es mayor a la entropía de los casos tetrapartita y tripartita (Bennett et al., 1993; Bennett et al., 1997; Torres-Arenas et al., 2019).

Por otra parte las medidas de entrelazamiento en estados GHZ n -partita presentaron una forma regular en cuanto a seguir un patrón. Esta regularidad es heredada a lo largo de todos los resultados, lo cual induce un patrón en los correspondientes resultados de la negatividad, el entrelazamiento residual total y en la entropía.

Usando la aproximación de modo único y con base en los resultados de las medidas de entrelazamiento de estados los estados GHZ n -partita en un marco de referencia no inercial con $n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cúbits entrelazados, se puede enunciar que el grado de entrelazamiento es dependiente de un parámetro $r \in [0, \pi/4]$ asociado a la aceleración $a \in [0, \infty]$, así como del número de cúbits no inerciales, de tal modo que las funciones de entrelazamiento decrecen más rápido conforme aumenta el número q de observadores no inerciales. Sin embargo, en este escenario, el entrelazamiento nunca desvanece a un en aceleración infinita.

Un interesante resultado de la negatividad $N_{1-(n-1)}$ es que ésta es la misma en estados GHZ en un marco de referencia no inercial con igual número de cúbits acelerados, siempre que al menos haya un observador inercial en entre los $(n-1)$ modos, sin importar el número de cúbits entrelazados. Por ejemplo, la negatividad N_{1-4} de un estado GHZ pentapartita con 3 cúbits no inerciales es igual a la negatividad N_{1-18} de un estado de 18 cúbits entrelazados con 3 cúbits no inerciales.

El entrelazamiento residual total de estados GHZ n -partita en un marco de referencia

no inercial $\frac{\pi}{n}$ y $\frac{\Pi}{n}$ es dependiente del número de observadores no inerciales y del parámetro $r \in [0, \pi/4]$. Este puede incrementarse por medio de crear estados GHZ con más cúbits inerciales para un número fijo de observadores no inerciales. Esto es porque a más cúbits inerciales el entrelazamiento se comparte entre más partes, lo que le brinda robustez. Sin embargo, $\frac{\pi}{n}$ y $\frac{\Pi}{n}$ para $n \rightarrow \infty$ la función $\cos^{2q}(r)$ limita el máximo entrelazamiento alcanzable en todos los casos estudiados. Por tanto, con base en la regularidad de la forma de los estados GHZ en un marco de referencia no inercial, se puede establecer, que para todo estado GHZ de un número arbitrario de cúbits no inerciales, también la antes mencionada función será la cota superior del entrelazamiento del estado GHZ. Es propuesto que $\cos^{2q}(r)$ podría ser usado como una buena aproximación del entrelazamiento residual total cuando $q \gg 1$, porque en el peor escenario (cuando todos los cúbits en un estado GHZ son no inerciales) la cantidad $\left| \frac{\binom{q=n}{\pi}}{n} - \cos^{2q}(r) \right|$ es despreciable.

Usando $\cos^{2q}(r)$ evaluado en $r = \pi/4$ como función del número de observadores no inerciales q para varios estados GHZ n -partita en un marco de referencia no inercial. De este modo, se determina que para $q = 4$ solo 10% de el entrelazamiento completamente inercial se conserva. Aún peor, para $q = 7$ la pérdida de entrelazamiento es de más del 99%. Ésta observación debería ser tomada en consideración en el estudio de las tareas de procesamiento de información cuántica aplicada al desarrollo de redes cuánticas y otras tecnologías cuánticas, ya que tareas tales como la destilación y la corrección de errores cuánticos estaría severamente comprometida.

LA entropía aumenta conforme aumenta el número de observadores acelerados. Es la misma en estados GHZ con igual número q de observadores no inerciales, siempre que exista al menos uno inercial entre el sistema. La entropía es una función de r y q , pero no de n . Además, una fórmula muy útil para calcular la entropía $\binom{q}{S_n}$ de los estados GHZ n -partita en un marco de referencia no inercial fue producida.

Un posible futuro en esta línea de trabajo podría incluir el estudio de un modelo más general para la descomposición de los estados en coordenadas de Rindler. La investigación más general de los estados W-class. A la luz de que otros tipos de estados cuánticos poseen propiedades de robustez ante los marcos de referencia no inercial, otros tipos de estados cuánticos deberían ser explorados. También sería importante investigar dentro

del formalismo de los canales cuánticos debido a su perspectiva matemática acerca del amortiguamiento del entrelazamiento debido al marco de referencia no inercial.

Apéndice A

Apéndices

A.1. Toolbox para las operaciones básicas en cómputo cuántico

Este código se desarrollo en MATHEMATICA11.3 para ayudar en la realización de los cálculos de vectores de estado, matrices de densidad, la traza sobre las regiones no accesibles, las transpuestas parciales y las entropías.

Para la realización de los productos directos se uso:

```
DirectProduct[a_, b_, c___] := (
  Off[KroneckerProduct::argmu];
  \[Rho] =
  KroneckerProduct[{KroneckerProduct[{a}, b][[1]]}, c][[
  1]];
  On[KroneckerProduct::argmu];
  If[Length[\[Rho]] <= 1, \[Rho][[1]], \[Rho]]
)
```

```
CircleTimes = DirectProduct;
```

Definir un vector de estado usando la función previa se puede hacer haciendo lo siguiente (tip: también puede ser usada la notación \otimes)

```
k0 = {1, 0};
k1 = {0, 1};
k0A = k0;
```

```

k1A = k1;
k0B = k0;
k1B = k1;
k0R = Cos[r]*DirectProduct[k0, k0] + Sin[r]*DirectProduct[k1, k1];
k1R = DirectProduct[k1, k0];

```

```

psi=1/Sqrt[2]*(DirectProduct[k0A, k0B, k0R] +
  DirectProduct[k1A, k1B, k1R])

```

Un vector obtenido de esta manera se puede almacenar usando la tecnología de SparseArray para manejar matrices grandes.

```

psiS = SparseArray[psi]

```

Para el cálculo de una matriz de densidad se puede usar la función KroneckerProduct

```

rho_ABR1R2 = KroneckerProduct[psiS, psiS];

```

Para trazar sobre las regiones no accesibles se puede usar el siguiente script que sirve para trazar sobre los primeros (n-1) cúbits.

```

\[Rho]in = "input density matrix"
n = Log[2, Length[\[Rho]in]]; T = 2^n; q = 4;
\[Rho] = SparseArray[Table[{2^k, 2^k} -> 0, {k, n - 1}]];
For[j = 1, j <= T/4, j = j + 2^(n - q - 1),
  rowTEMP = SparseArray[Table[{2^k, 2^k} -> 0, {k, n - q}]];
  For[i = 1, i <= T/4, i = i + 2^(n - q - 1),
    rowTEMP =
      Join[rowTEMP, \[Rho]in[[{(j - 1)*T/2^(n - 2) +
        1 ;; (j - 1)*T/2^(n - 2) + T/2^q, (i - 1)*T/2^(n - 2) +
        1 ;; (i - 1)*T/2^(n - 2) + T/2^q}]] + \[Rho]in[[{(j - 1)*T/2^(n - 2) + T/2^q +
        1 ;; (j - 1)*T/2^(n - 2) + T/2^(q - 1), (i - 1)*T/2^(n - 2) +
        T/2^q + 1 ;; (i - 1)*T/2^(n - 2) + T/2^(q - 1)}]], 2];
  ];
\[Rho]temp = rowTEMP[[1 ;; T/2^q, \!\(TraditionalForm\`
\*FractionBox[\(T\),
SuperscriptBox[\(2\), \(\q\)] + 1\)] ;; \!\(TraditionalForm\`

```

```

\FractionBox[\(T\),
SuperscriptBox[\(2\), \(\q\)] +
\FractionBox[\(TraditionalForm\`T\), \(\(2\)\)\]];
\Rho = Join[\Rho, \Rho temp];
]
"output density matrix" =
\Rho [[
T/2 + 1 ;; T, \!\(TraditionalForm\`1\)\ ;; \!\(TraditionalForm\`
\FractionBox[\(TraditionalForm\`T\), \(\(2\)\)\]];

```

Pero para trazar sobre el último cúbit es necesario usar el siguiente código

```

\Rho in="input density matrix";
n=Log[2,Length[\Rho in]];
T=2^n;
\Rho temp=SparseArray[Table[{2^k,2^k}->0,{k,n-1}]];
b=0;
list={};
For[j=1,j<T,j=j+2,
a=0;
For[i=1,i<T,i=i+2,
\Rho temp[[i-a,j-b]]=Tr[\Rho in[[i;;i+1,j;;j+1]]];
a++
];
b++
]
"Output density matrix"=\Rho temp;

```

Una función para trasponer los primeros (n-1) cúbits se muestra a continuación.

```

\Rho in = "input density matrix"
n = Log[2, Length[\Rho in]]; T = 2^n; q = 4;
\Rho temp = SparseArray[Table[{2^k, 2^k} -> 0, {k, n}]];
For[j = 1, j <= T, j = j + T/2^(q - 1),
For[i = 1, i <= T, i = i + T/2^(q - 1),

matA = \Rho in[[j ;; T/2^(q - 1) + j - 1,
i ;; T/2^(q - 1) + i - 1]];

```

```

rowTEMP =
  Transpose[{{matA[[1 ;; T/2^q, 1 ;; T/2^q]],
    matA[[1 ;; T/2^q, T/2^q + 1 ;; T/2^(q - 1)]], {matA[[
      T/2^q + 1 ;; T/2^(q - 1), 1 ;; T/2^q]],
    matA[[T/2^q + 1 ;; T/2^(q - 1), T/2^q + 1 ;; T/2^(q - 1)]]}]];
\[Rho]temp[[j ;; T/2^q + j - 1, i ;; T/2^q + i - 1]] =
  rowTEMP[[1]][[1]];
\[Rho]temp[[j ;; T/2^q + j - 1, T/2^q + i ;; T/2^(q - 1) + i - 1]] =
  rowTEMP[[1]][[2]];
\[Rho]temp[[T/2^q + j ;; T/2^(q - 1) + j - 1, i ;; T/2^q + i - 1]] =
  rowTEMP[[2]][[1]];
\[Rho]temp[[T/2^q + j ;; T/2^(q - 1) + j - 1,
  T/2^q + i ;; T/2^(q - 1) + i - 1]] = rowTEMP[[2]][[2]];
]
]
"output density matrix" = \[Rho]temp;

```

Pero para transponer el último cúbit siempre será necesaria la siguiente fórmula.

```

\[Rho]in = "input density matrix"
n = Log[2, Length[\[Rho]in]];
\[Rho]temp = SparseArray[Table[{2^k, 2^k} -> 0, {k, n}]]
For[j = 1, j <= 2^n, j = j + 2,
  For[i = 1, i <= 2^n, i = i + 2,
    \[Rho]temp[[j ;; j + 1, i ;; i + 1]] =
      Transpose[\[Rho]in[[j ;; j + 1, i ;; i + 1]]];
  ]
]
"output density matrix" = \[Rho]temp;

```

La negatividad fue calculada con el siguiente algoritmo.

```

rhoDtoM = "input density matrix"; (*Use Normal[ ] in case SparseArray[ ] was used*)
eigenvals = Eigenvalues[rhoDtoM];
negativeEigenvalsTest = Map[IsNegativeFunction1D, eigenvals];
negativeEigenvals = eigenvals*negativeEigenvalsTest;
Negativity =
  2*Sum[Abs[negativeEigenvals[[i]]], {i, Length[negativeEigenvals]}];
"Negatividad" = Simplify[Negativity]

```

donde *IsNegativeFunction1D* está definida de la siguiente manera:

```
IsNegativeFunction1D[func_] := Module[{func = func},
  contradominio = Table[
    func /. r -> x
  ,
    {x, 0, N[\[Pi]/4], N[\[Pi]/1024]};
  contradominio =
  contradominio /. Indeterminate -> -1;

  negativematrix = Map[If[#1 < 0, True, False] &, contradominio];
  checknozero = Total[contradominio];
  checkallnegative = AllTrue[negativematrix, TrueQ];
  If[checknozero != 0 && checkallnegative, 1, 0]]
```

Finalmente, para calcular la entropía de von Neumann se siguió la secuencia de comandos del siguiente párrafo

```
Entropia[\[Rho]in_] := -1*Module[{\[Rho]temp = \[Rho]in},
  entropyTEMP = 0;
  eigenvals = Eigenvalues[\[Rho]temp];
  For[i = 1, i <= Length[eigenvals], i++,
    If[TrueQ[eigenvals[[i]] == 0],
      Continue[];
    ,
      entropyTEMP =
        entropyTEMP +
          eigenvals[[i]]*Log[2, eigenvals[[i]]];
    ];
  ];
  entropy=entropyTEMP
]
```

Bibliografía

- Alsing, P. M. and Fuentes, I. (2012). Observer-dependent entanglement. *Classical and Quantum Gravity*, 29(22):224001.
- Asensio, P. I. (2019). *Campos Cuánticos en Espaciotiempos Curvos; Efecto Unruh, Detectores de Unruh-DeWitt y el Concepto de Partícula*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Físicas Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid.
- Bengtsson, I. and Życzkowski, K. (2006). *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. New York: Cambridge University Press.
- Bennett, C. H., Bernstein, E., Brassard, G., and Vazirani, U. (1997). Strengths and weaknesses of quantum computing. *SIAM Journal on Computing*, 26(5):1510–1523.
- Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., and Wootters, W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899.
- Bouwmeester, D., Ekert, a. K., and Zeilinger, A. (2011). *The physics of quantum information : quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation*. Berlin ; London : Springer, 2011.
- Brillouin, L. (1960). *Science and Information Theory*. Academic Press. EUA.
- Bruschi, D. E., Louko, J., Martín-Martínez, E., Dragan, A., and Fuentes, I. (2010). Unruh effect in quantum information beyond the single-mode approximation. *Physical Review A*, 82(4).
- Cartan, E. (1981). *The theory of spinors*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Mineola, NY.
- Case, W. B. (2008). Wigner functions and weyl transforms for pedestrians. *American Journal of Physics*, 76(10):937–946.
- Coffman, V., Kundu, J., and Wootters, W. K. (2000a). Distributed entanglement. *Phys. Rev. A*, 61:052306.
- Coffman, V., Kundu, J., and Wootters, W. K. (2000b). Distributed entanglement. *Physical Review A*, 61(5).

- Cover, T. and Thomas, J. (2006). *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience. EUA.
- Crispino, L. C. B., Higuchi, A., and Matsas, G. E. A. (2008). The unruh effect and its applications. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):787–838.
- de la Pena, L. (1996). *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Ediciones Científicas Universitarias. Fondo de Cultura Económica, 3 edition.
- Dong, Q., Carrillo, R. S., Sun, G.-H., and Dong, S.-H. (2022). Tetrapartite entanglement measures of generalized ghz state in the noninertial frames. *Chinese Physics B*, 31(3):030303.
- Dong, Q., Sánchez-Manilla, A., A., López-Yáñez, I., Sun, G. H., and Dong, S. H. (2019). Tetrapartite entanglement measures of ghz state with uniform acceleration. *Physica Scripta*, 94(105101):1–9.
- Emam, M. H. (2021). Coordinate systems and vectors. In *Covariant Physics*, pages 1–40. Oxford University Press.
- Fletcher, D. and Toms, D. (2015). Bogoliubov transformations, particle creation and entanglement. Technical Report MAS8091: MMath Project 2014/2015, Newcastle University.
- Fuentes-Schuller, I. and Mann, R. B. (2005). Alice falls into a black hole: Entanglement in noninertial frames. *Physical Review Letters*, 95(12).
- García, J. Curso de mecánica teórica. <https://www.youtube.com/watch?v=T43u3jfu6yc&list=PLAnA8FVrB18C-2TTrbArT1g04RJEckRMG>. En youtube 2020.
- Hartle, J. B. (2021). *Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Kaufmann, W. J., Carriazo, E. P., and Villamizar, H. J. (1977). *Relatividad y cosmología*. México : Editorial Harla.
- Kozłowski, W., Dahlberg, A., and Wehner, S. (2020). Designing a quantum network protocol. In *Proceedings of the 16th International Conference on emerging Networking EXperiments and Technologies*. ACM.
- Lemus, R. and Hernández-Castillo, A. O. (2015). Symmetry projection, geometry and choice of the basis. *Revista Mexicana de Física E*, 61:113–118.
- Li, Y., Liu, C., Wang, Q., Zhang, H., and Hu, L. (2016). Tetrapartite entanglement of fermionic systems in noninertial frames. *Optik*, 127(20):9788–9797.
- Lichfield, G. Faltan unos años para crear ordenadores cuánticos que funcionen bien. <https://www.technologyreview.es/s/11569/faltan-unos-anos-para-crear-ordenadores-cuanticos-que-funcionen-bien>. Recuperado 8 noviembre, 2019.
- Llano, M. (1996). *Mecánica cuántica*. Universidad Nacional Autónoma, 1 edition.

- Manríguez-Zepeda, J. L., Rueda-Paz, J., Avila-Aoki, M., and Dong, S. H. (2022). Pentapartite entanglement measures of ghz and w-class state in the noninertial frame. *Entropy*, 24(6).
- Marimar-Jiménez, M. Una treintena de empresas batalla por liderar la computación cuántica. https://cincodias.elpais.com/cincodias/2019/02/08/companias/1549657283_653478.html. Recuperado 6 noviembre, 2019.
- Martínez, T. A. (2009). La mecánica cuántica: El experimento stern-gerlach. online blog. <http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com/2009/08/el-experimento-stern-gerlach.html>, Última modificación: diciembre del 2021.
- Oliveira, D. S. and Ramos, R. V. (2010). Residual entanglement with negativity for pure four-qubit quantum states. *Quantum Inf Process*, 9(497–508).
- Peres, A. (1996). Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415.
- Popescu, S. and Rohrlich, D. (1997). Thermodynamics and the measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 56:R3319–R3321.
- Qiang, W. C., Dong, Q., A., M.-S. M., Sun, G. H., and Dong, S. H. (2019). Entanglement property of the werner state in accelerated frames. *Quantum Information Processing*, 18(314):1–20.
- Ramzan, M. (2012). Decoherence and multipartite entanglement of non-inertial observers. *Chinese Physics Letters*, 29(2):020302.
- Sakurai, J. J. and Napolitano, J. (201). *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley (Jim Smith). EUA.
- Schwartz, M. D. (2013). *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423.
- Smith, J. (1978). *Introducción a la relatividad especial*.
- Socolovsky, M. (2013). Rindler space and unruh effect.
- Soper, D. E. (2008). *Classical field theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, Mineola, NY.
- Sundermeyer, K. (2014). *Symmetries in Fundamental Physics*. Fundamental Theories of Physics. Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2 edition.
- Susskind, L. and Friedman, A. (2019). *Special relativity and classical field theory*. Theoretical Minimum. Basic Books, La Vergne, TN.
- Tipler, P. A. (2014). *Física Moderna Tipler III*. Barcelona : Reverté,.

- Torres-Arenas, A. J., López-Zuñiga, E. O., Saldaña-Herrera, J. A., Dong, Q., Sun, G. H., and Dong, S. H. (2019). Tetrapartite entanglement measures of w-class in noninertial frames. *Chinese Physics B*, 28(070301):1–10.
- Vidal, G. and Werner, R. F. (2002). Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 65:032314.
- von Neumann, J. and Beyer, R. T. (1996). *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton, N.J: Princeton University Press.
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL.
- Wei, S.-H., Jing, B., Zhang, X.-Y., Liao, J.-Y., Yuan, C.-Z., Fan, B.-Y., Lyu, C., Zhou, D.-L., Wang, Y., Deng, G.-W., Song, H.-Z., Oblak, D., Guo, G.-C., and Zhou, Q. (2022). Towards real-world quantum networks: a review.
- White, H. (1992). *Física Moderna*. [S. l.] : UTEHA.
- Wilde, M. M. (2017). *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press. United Kingdom.
- Yanofsky, N. and Manucci, M. (2008). *Quantum Computing For Computer Scientist*. University Press. EUA.

C O N S T A N C I A S



Universidad Autónoma del Estado de México

Subdirección Académica
Constancia

Texcoco, México a 02 de julio de 2021.

ALUMNO JUAN LUIS MANRIQUEZ ZEPEDA
PRESENTE.

En mi calidad de Subdirector Académico del Centro Universitario Texcoco, Dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de México, tengo a bien hacer CONSTAR su participación en el Coloquio del Doctorado en Ciencias de la Computación, llevado a cabo el 02 de Julio 2021, en las instalaciones del Centro Universitario UAEM Texcoco.

Sin más por el momento, aprovecho la ocasión para reiterarle mi atenta y distinguida consideración.

JUA T E N T A M E N T E
PATRIA, CIENCIA Y TRABAJO
"2021, Celebración de los 65 Años de la Universidad Autónoma del Estado de México"


M. EN C. ED. JUAN CARLOS RAMOS CORCHADO
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



JCRC*aleo



Universidad Autónoma
del Estado de México



A través del

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

Otorga la presente

Constancia

Al:

Mtro. Juan Luis Manríquez Zepeda

Por haber realizado su **Examen Pre-Doctoral** de forma virtual el
día jueves 16 de Junio del presente.

Valle de Chalco, Estado de México, junio de 2022.

Patria, Ciencia y Trabajo

*“2022, Celebración de los 195 Años de la
Apertura de las Clases en el Instituto Literario”*

CENTRO UNIVERSITARIO



VALLE DE CHALCO
DOCTORADO EN CIENCIAS
DE LA COMPUTACIÓN

Dra. Cristina Juárez Landín
Coordinadora del Doctorado en
Ciencias de la Computación del
CU UAEM Valle de Chalco





Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas

22 al 26 de Septiembre de 2020

Otorga la presente

CONSTANCIA:

JUAN LUÍS MANRIQUEZ ZEPEDA

Por su participación como ponente

Del trabajo:

Minicurso de Cálculo 2 como recurso educativo en la pandemia

In memoriam del



En el 11° Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas, realizado de manera virtual por el Centro Universitario Nezahualcóyotl de la Universidad Autónoma del Estado de México y con la participación del Cuerpos Académicos de Cómputo Aplicado y Aplicación de Sistemas Inteligentes.

26 de septiembre, Estado de México

Dr. François Pluvinage.

[Signature]
Dra. Magally Martínez Reyes
Presidenta del Comité Ejecutivo

[Signature]
Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo
Presidente Fundador





Universidad Autónoma del Estado de México

La Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados

Otorga la presente

Constancia

Juan Luis Manríquez Zepeda

Por su valiosa participación en el **Taller Redacción de Textos Científicos**, modalidad en línea, impartido por *Springer Nature*, el 23 de junio de 2021.

Toluca, México, 28 de junio de 2021.

Patria, Ciencia y Trabajo

"2021, Celebración de los 65 Años de la Universidad Autónoma del Estado de México"



SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN
Y ESTUDIOS AVANZADOS
Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Secretaria



Universidad Autónoma
del Estado de México

Otorga la presente

Constancia

a

**JUAN LUIS MANRIQUEZ
ZEPEDA**

Por su participación en la acción académica CURSO
"ELABORACIÓN DE HERRAMIENTAS
MULTIMEDIOS INTERACTIVAS" en modalidad en
línea, del 12 de octubre al 16 de octubre de 2021, con
una duración de 25 horas.

Toluca, México, 16 de octubre de 2021

PATRIA, CIENCIA Y TRABAJO

"2021, Celebración de los 65 años de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Dirección de Desarrollo
del Personal Académico

Maestra en Estudios Literarios Hilda Angela Fernández Rojas
Directora de Desarrollo del Personal Académico

N° -48355762

<http://didepa.uaemex.mx/>





Universidad Autónoma
del Estado de México

Otorga la presente

Constancia

a

**JUAN LUIS MANRIQUEZ
ZEPEDA**

Por su participación en la acción académica CURSO
"SER DOCENTE UAEM" en modalidad en línea, del
10 de enero al 14 de enero de 2022, con una duración
de 25 horas.

Toluca, México, 14 de enero de 2022

PATRIA, CIENCIA Y TRABAJO

"2022, Celebración de los 195 Años de la Apertura de las Clases en el Instituto Literario"



Dirección de Desarrollo
del Personal Académico

Maestra en Estudios Literarios Hilda Angela Fernández Rojas
Directora de Desarrollo del Personal Académico

N° 1018074955

<http://didepa.uaemex.mx/>





Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas

A nombre del Comité Académico se extiende la presente

Constancia de Asistencia a:

Juan Luis Manríquez Zepeda

En agradecimiento a su participación en el

Seminario Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas

Transmitido y realizado del 26 de noviembre del 2021 al 18 de febrero del 2022, desde la ciudad de México, con duración de 40 horas. Se extiende la presente a los 18 días del mes de febrero del 2022.

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo
Responsable del Seminario

Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN

Dra. Judith Hernández-Sánchez
Coordinadora del Seminario

Universidad Autónoma de Zacatecas





Universidad Autónoma del Estado de México

a través del

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM Texcoco

Otorga la presente

Constancia

a

Juan Luis Manriquez Zepeda

Por haber presentado su proyecto de investigación en el **“Coloquio de Investigación 2022 A” del Doctorado en Ciencias de la Computación** llevado a cabo en la modalidad virtual por la Plataforma Teams para su divulgación en la comunidad universitaria el 27 de junio del 2022.

Texcoco de Mora, junio de 2022

Patria, Ciencia y Trabajo

“2022, Celebración de los 195 Años de la Apertura de las Clases en el Instituto Literario”




Maestro en Ciencias de la Educación Familiar
Juan Carlos Ramos Corchado
Subdirector Académico



Doctorado en
**Ciencias de la
Computación**
Centro Universitario UAEM Texcoco



Universidad Autónoma
del Estado de México

UN/SA/22/975

Otorga la presente

Constancia

AL: MTRO. JUAN LUIS MANRÍQUEZ ZEPEDA

Por la elaboración de la Guía Pedagógica **CÁLCULO II**, correspondiente a la Licenciatura en Ingeniería en Sistemas Inteligentes, en el semestre **2022-A**, avalado por los H. H. Consejos de Gobierno y Académico, en la sesión ordinaria del día 28 de marzo del 2022.

Estado de México a 29 de marzo de 2022

Patria, Ciencia y Trabajo

"2022, Celebración de los 195 Años de la apertura de las Clases en el Instituto Literario"



Centro Universitario UAEM
Nezahualcóyotl

Mtro. en S. S. Carlos Anaya Hernández
Secretario de los H.H. Consejos Académico y de Gobierno
C.U. UAEM Nezahualcóyotl



Universidad Autónoma
del Estado de México

**La Secretaría de Investigación
y Estudios Avanzados**

Otorga la presente

Constancia

a

Juan Luis Manriquez Zepeda

Por su participación en el Taller en línea *Herramientas para la publicación de textos científicos*, impartido por **Springer Nature**.

Toluca, México, 29 de abril de 2021.

Patria, Ciencia y Trabajo

“2021, Celebración de los 65 Años de la Universidad Autónoma del Estado de México”



Doctora en Ciencias Económicas y Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Encargada del Despacho de la Secretaría





Universidad Autónoma
del Estado de México

**La Secretaría de Investigación
y Estudios Avanzados**

Otorga la presente

Constancia

a

Juan Luis Manríquez Zepeda

Por su participación en el Taller en línea *¿Cómo seleccionar revistas en el ranking con impacto científico?*, impartido por **Clarivate Web of Science**.

Toluca, México, 30 de abril de 2021.

Patria, Ciencia y Trabajo

“2021, Celebración de los 65 Años de la Universidad Autónoma del Estado de México”



Doctora en Ciencias Económico Administrativas

Eréndira Fierro Moreno

Encargada del Despacho de la Secretaría
de Investigación y Estudios Avanzados

SIEA



Universidad Autónoma
del Estado de México



Otorga la presente

Constancia

a

Juan Luis Manriquez Zepeda

Por haber aprobado el

"Taller: Elementos básicos para crear gráficas en Microsoft Excel 2019", llevado a cabo el 9 de febrero de 2022, con una duración de 1 hr.

Toluca de Lerdo, 22 de Marzo de 2022

Patria, Ciencia y Trabajo

"2022, Celebración de los 195 años de la Apertura de las Clases en el Instituto Literario"

Maestra en Administración de Tecnologías de Información
Jeanett Mendoza Colín
Directora de Tecnologías de la Información y Comunicaciones
Secretaría de Administración



DTIC



Universidad Autónoma
del Estado de México



Otorga la presente

Constancia

a

Juan Luis Manriquez Zepeda

Por haber aprobado el

"Taller: Elementos básicos de Microsoft Word 2019", llevado a cabo el 10 de febrero de 2022, con una duración de 1 hr. 30 min.

Toluca de Lerdo, 22 de Marzo de 2022

Patria, Ciencia y Trabajo

"2022, Celebración de los 195 años de la Apertura de las Clases en el Instituto Literario"

Maestra en Administración de Tecnologías de Información
Jeanett Mendoza Colín
Directora de Tecnologías de la Información y Comunicaciones
Secretaría de Administración



DTIC



Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas

22 al 26 de Septiembre de 2020

Otorga la presente

CONSTANCIA:

JUAN LUIS MANRIQUEZ ZEPEDA

Por su participación como ASISTENTE

Al Taller: **Uso de STEM en la enseñanza de las matemáticas**

In memoriam del



En el 11° Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas, realizado de manera virtual por el Centro Universitario Nezahualcóyotl de la Universidad Autónoma del Estado de México y con la participación de los Cuerpos Académicos de Cómputo Aplicado y Aplicación de Sistemas Inteligentes.

Con un valor curricular de 3 horas

26 de septiembre, Estado de México

Dr. Francois Pluinage.

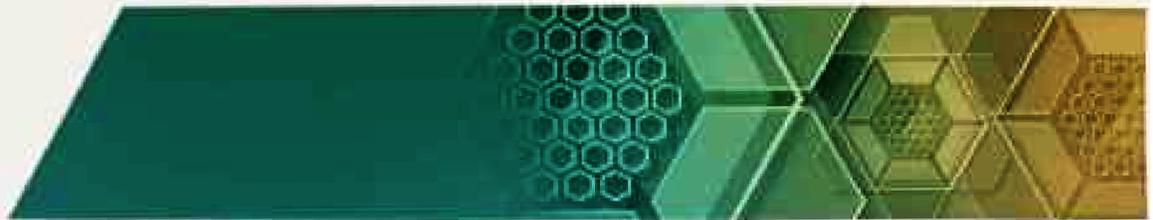
Dr. Magally Martínez Reyes
Presidenta del Comité Ejecutivo

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo
Presidente Fundador





Universidad Autónoma
del Estado de México



Otorga la presente

Constancia

de ponente a

Juan Luis Manríquez Zepeda

con el tema

**Investigación del entrelazamiento en sistemas
pentapartita en marcos de referencia no inerciales**

Por haber participado en el Coloquio de Investigación 2022B
Modalidad Virtual

Dirigido a los integrantes del programa de Doctorado en Ciencias de la Computación con registro en el PNPC, con la participación de profesores y alumnos de posgrados de los Centros Universitarios: Texcoco, Valle de Chalco y la UAP Tlanguistenco.

Tlanguistenco, México; 30 de noviembre de 2022

Patria, Ciencia y Trabajo

"2022, Celebración de los 195 años de la Apertura de las Clases en el Instituto Literario"

Dr. en Ing. Martín Carlos Vera Estrada,
Coordinador General de la UAP Tlanguistenco



UAP Tlanguistenco

El Tecnológico Universitario del Valle de Chalco, A.C.
otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a

MTRO. JUAN LUIS MANRÍQUEZ ZEPEDA

Por haber presentado la Conferencia:
“Breve introducción al cómputo y a la informática cuántica relativista”
durante la Jornada de Ciencia y Tecnología 2022.

Valle de Chalco Solidaridad, Estado de México, noviembre 2022.


Dra. María Adriana Jiménez Romero
Directora General


Lic. Luis Alberto Mojica Galaviz
Director Académico

Jornada de Ciencia
y Tecnología
2022

Formando profesionistas
para la transformación y la
justicia en México