Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Espacios de Sobolev en Dominios con Simetrías

TESIS TRADICIONAL

que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

presenta

DAVID FLORES FLORES

Tutor Académico:

DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

Tutor Adjunto:

DR. ERIC FABIÁN HERNÁNDEZ MARTÍNEZ

UAEM

TOLUCA, ESTADO DE MÈXICO 2023

Resumen

Es bien sabido que los encajes de Sobolev se pueden mejorar en presencia de simetrías. En este trabajo, consideramos la situación en la que dado un dominio $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ en $\mathbb{R}^N$ con una simetría cilíndrica, y actuando un grupo G en Ω_1, para esta situación se muestra que el exponente crítico de Sobolev aumenta en el caso de encajes en espacios de Lebesgue con peso $L^q_h(\Omega)$. En este artículo, enunciaremos varios resultados basados en los teoremas de Wang, ayudándonos con los resultados de Hebey-Vaugon, relacionados con encajes compactos de un espacio de Sobolev con funciones radialmente simétricas en algún espacio con peso L^q_w, con q superior al exponente crítico usual.

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que los encajes de Sobolev se pueden mejorar en presencia de simetrías. En este artículo, consideramos la situación en la que dado un dominio $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ en $\mathbb{R}^N$ con una simetría cilíndrica, y actuando un grupo G en Ω_1, para esta situación se muestra que el exponente crítico de Sobolev aumenta en el caso de encajes en espacios de Lebesgue con peso $L_h^q(\Omega)$. En este artículo, enunciaremos varios resultados basados en los teoremas de Wang, ayudándonos con los resultados de Hebey-Vaugon, relacionados con encajes compactos de un espacio de Sobolev con funciones radialmente simétricas en algún espacio con peso L^q, con q superior al exponente crítico usual.

Dado un dominio Ω en $\mathbb{R}^N$, es bien sabido que para $1 < p < \infty$, si $p < N$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se puede encajar continuamente en $L^q(\Omega)$ si $p < q \leq p^*$, donde $p^* = \frac{Np}{n-p}$, (ver [2], [4]) (recordando que si $p = 2$, estos espacios son espacios de Hilbert y generalmente se denotan como H^1). Además, si Ω está acotado y $q < p*$, el encaje es compacto. Si tomamos $W_s^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u$ es radialmente simétrico, es decir, $u(x) = u(\|x\|),\ \forall x \in \Omega\}$, según el resultado de Lions (ver [14], [15]), $W_s^{1,p}(\Omega)$ se puede encajar de forma compacta en $L^q(\Omega)$ para $p < q < p^*$. La idea aquí es mostrar cómo se pueden mejorar los encajes de Sobolev en presencia de simetrías mediante acciones de un grupo. Esto incluye encajes en algunos espacios con peso L^p, con p más alto que el exponente crítico habitual de Sobolev. Dichos fenómenos han sido observados en contextos específicos por varios autores. Por un lado, Hebey y Vaugon ([11], [12]) estudiaron esta situación en el contexto de una variedad riemanniana compacta M y un grupo compacto de isometrías G. Consideraron la dimensión de la órbita del grupo, que se llama k, y analizaron el espacio de Sobolev $W_{0,G}^{1,p}(M) = \{u \in W_0^{1,p}(M) :\ u \circ \sigma = u\ \ \forall\, \sigma \in G\}$. Demostraron que el exponente crítico de Sobolev aumenta si no hay puntos en un subconjunto abierto con cerradura compacta Ω de M con órbitas discretas bajo la acción de G, obtuvieron un máximo exponente crítico para el encaje de $W_{0,G}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ por $1 < q < \frac{p(N-k)}{N-k-p}$.

Por otro lado, Wang ([19]) estableció los resultados de encaje en un dominio regular con simetría cilíndrica. Al hacer $H_s^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x_1, x_2) = w(x_1, \|x_2\|),\ \forall x_2 \in \Omega_2\}$, demostró que tomando $h = \|x\|^l$, $x \in \Omega_2$ y l un número real positivo, la cual es radialmente simétrica en Ω_2, entonces, existe un número positivo τ, que depende de las dimensiones de Ω_1 y Ω_2 tal que el encaje $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^q(\Omega)$ es compacto para $1 < q < 2^* + \tau$, donde 2^* es el dado por los teoremas de encaje de Sobolev.

Nuestro objetivo aquí es el estudio de los encajes de Sobolev, generalizando los resultados de Wang utilizando los obtenidos por Hebey y Vaugon. Primero, tratamos lo encajes de Sobolev en un dominio con simetría cilíndrica. Este dominio se tomará de la siguiente manera: Sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ en $\mathbb{R}^N$; donde Ω_1 es un conjunto acotado de la clase C^1 en $\mathbb{R}^m$, y Ω_2 en $\mathbb{R}^j$ es una bola de radio R centrado en el origen. Después de esto, involucraremos la acción de los grupos, haciendo que un grupo G actúe sobre Ω_1. Con esto, definimos un Espacio de Sobolev $G-$invariante en Ω_1 y radialmente simétrico en Ω_2 $H^1_{s,G} = \{u \in H^1_s(\Omega) : \forall g \in G, u(gx_1, x_2) = u(x_1, x_2)\}$, y luego, para $y \in \Omega_2$, tomamos una función continua $h(y)$, y definimos el espacio de Lebesgue con peso $L^q_h(\Omega)$. Basándonos en esto, probaremos que bajo ciertas condiciones $H^1_{s,G}(\Omega)$ se puede encajar de forma compacta en $L^q_h(\Omega)$ por $1 < q < 2^*_k + \psi$ donde ψ es mayor que el τ dado por Wang.

Este documento consta de tres capítulos. En el Capítulo 1 tratamos algunos conceptos y resultados preliminares, el Capítulo 2 contiene un estudio de algunos resultados obtenidos por Wang; los principales resultados y las pruebas se dan en el Capítulo 3.

ANTECEDENTES

En el campo de las ecuaciones diferenciales parciales, el estudio de los encajes de Sobolev tiene un papel vital para el método variacional. La teoría de los espacios de Sobolev vió su origen por el matemático ruso Sergei Lvovich Sobolev alrededor de 1938 [18]. El estudio de estos espacios surge por la necesidad de tener una herramienta para la comprensión de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Dichos espacios están estrechamente relacionados con la teoría de las distribuciones, ya que los elementos de tales espacios son clases especiales de distribuciones. Conforme se ha ido trabajando en base a estas teorías, ha sido necesario estudiar nuevos espacios con caracteristicas y propiedades nuevas. Una de las propiedades que se han ido estudiando son las simetrías.

Las simetrías juegan un papel importante en los problemas variacionales, por lo que el estudio de los encajes de Sobolev toma más fuerza, permitiendo resolver más problemas relacionados con ecuaciones diferenciales parciales. Se puede ver en resultados recientes, por ejemplo ([1], [6], [7], [14], [16]). Es bien sabido que los encajess de Sobolev pueden mejorarse si tratamos con subespacios de funciones invariantes bajo la acción de algún grupo de simetrías (ver [3], [5], [8], [9], [10], [17], [20]). Estas condiciones se han utilizado para probar la existencia de soluciones a problemas de valor en la frontera. En algunos casos, es suficiente considerar funciones invariantes para analizar bajo qué condiciones ocurre la compacidad de estos encajes. Sin embargo, la simetría por sí sola no proporciona las mejoras deseadas si nos restringimos a los espacios L^p habituales.

Para ir mejorando los resultados de encajes de Sobolev; esto es, mostrar que existe un exponente p superior al exponente crítico de Sobolev tal que $W_0^{1,q}(\Omega)$ se encaje en $L^p(\Omega)$ de forma continua y compacta, donde Ω es un dominio con ciertas propiedades; ha sido necesario ir estableciendo dichas condiciones y propiedades a los dominios principalmente para poder tener mejores resultados. Una de estas propiedades es el uso de acciones de grupos y la presencia de simetrías, las cuales mencionamos anteriormente. Hebey y Vaugon [12] establecieron resultados de encajes de Sobolev involucrando las acciones de grupos en una variendad riemanniana M de dimensión n, probando que existe un exponente mayor al exponente crítico de Sobolev $p^* = \frac{np}{n-p}$ con p un número real, $p \geq 1$. Dicho exponente depende la dimensión de la orbita del grupo que se encuentra actuando en dichas variedades, denotado por k, con lo cual el exponente $p_k^* = \frac{p(n-k)}{n-k-p}$ sea el exponente buscado, y además $p_k^* > p^*$, con lo que $W_0^{1,q}(M)$ se encaja de forma compacta en $L^p(M)$ si $p < p_k^*$.

La principal referencia que usaremos será el artículo [19] donde se estudió el siguiente problema: Sea h una función continua positiva sobre $\overline{\Omega}$, radialmente simétrica sobre Ω_2. Entonces existe un número positivo τ tal que el encaje $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^q(\Omega)$ es compacto para todo $q \in (1, 2^* + \tau)$. Esto es lo que se conoce como un problema de encajes de Sobolev en el que se involucran simetrías, el cual nos auxilia para el estudio y la resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales. En [19] se prueba que bajo ciertas condiciones dicho número τ existe, con lo que en consecuencia, dicho encaje se puede dar.

HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

En este trabajo se hace una generalización de los resultados enunciados en [19], lo cual esto es posible al involucrar un grupo de transformaciones actuando en nuestro dominio Ω, como lo hemos platicado anteriormente. Iniciaremos planteando el objetivo y la conjetura, y en las secciones posteriores plantearemos los conceptos y resultados que nos ayudarán a probar dichas conjeturas.

Nuestro objetivo consiste en responder las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Existe un exponente p mayor al exponente crítico $q \in (1, 2^* + \tau)$, donde $\tau(h, m, k)$ es la que encontramos en el capítulo anterior, para el cual el encaje $H^1_s(\Omega) \hookrightarrow L^p_h(\Omega)$ es compacto? De ser así,

2. ¿Dicho exponenete funcionará para los mismos espacios $H^1_s(\Omega)$ y $L^q_h(\Omega)$?

Creemos que es posible encontrar argumentos análogos para responder a las preguntas 1 y 2. Conjeturamos que la respuesta es afirmativa en ambos casos, siempre y cuando involucremos una acción de grupos en nuestro dominio Ω, permitiendo encontrar tal exponente p, y trabajando en un nuevo espacio de Sobolev. Iniciaremos viendo algunos conceptos de acción de grupos

Índice general

Capítulo 1

FUNDAMENTOS

Para discutir la teoría de los espacios de Sobolev comenzaremos con algunas nociones básicas simples que son necesarias para introducir y estudiar estos espacios. Esto es importante, ya que los elementos de tales espacios son funciones definidas en los dominios de $\mathbb{R}^N$ con valores reales.

En este capítulo se presentará un material auxiliar necesario para entender la teoria de espacios de Sobolev. Se discutirán las siguientes nociones: Espacios normados, Espacios de Lebesgue L^p y Espacios de Sobolev.

1.1. Conceptos básicos

En esta sección abordaremos algunas propiedades que tienen los espacios normados, las cuales serán de utilidad para el estudio y comprensión de los temas posteriores.

Definición 1.1. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades*

1. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *para cualesquiera* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

Definición 1.2. *Dado $x \in \mathbb{R}^N$, definimos*

1. $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
2. $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$.

Lema 1.1 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para cualquier par de números reales $a, b \geq 0$ se cumple que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Demostración. Si $a = 0$ ó $b = 0$ la desigualdad es inmediata.

Supongamos que $ab > 0$. Como la función exponencial e^x es convexa tenemos que

$$e^{(1-t)u+tv} \leq (1-t)e^u + te^v.$$

Tomemos $u = \ln a^p$, $v = \ln b^q$ y $t = \frac{1}{q}$, con lo que $e^u = a^p$, $e^v = b^q$ y $t \in (0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} &\leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \\ ab &\leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.1 (Desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^N$)**.** *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para cualesquiera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

donde $xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_Ny_N)$.

Demostración. Si $x = 0$ o si $y = 0$ se da la igualdad. Supongamos que ambos son distintos de cero. Definamos

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \qquad \text{y} \qquad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}.$$

Aplicando la desigualdad de Young (proposición 1.1) a a_i y b_i obtenemos que

$$\begin{aligned} a_i b_i &= \frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \\ &\leq \frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|_q^q}. \end{aligned}$$

Sumando todas las desigualdades para $i = 1, 2, \ldots, N$ concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i|\right) &\leq \frac{1}{p\|x\|_p^p} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right) + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right) \\ &= \frac{1}{p\|x\|_p^p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\|y\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $\|x\|_p \|y\|_q$ obtenemos la desigualdad buscada. $\square$

Proposición 1.2. *Para toda $x \in \mathbb{R}^N$ se cumple que*

1. $\|x\|_r \leq \|x\|_s$ *si* $1 \leq s \leq r \leq \infty$,

2. $\|x\|_r \leq N^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_s$ *si* $1 \leq s \leq r < \infty$,

3. $\|x\|_s \leq N^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$ *si* $1 \leq s < \infty$.

Demostración. 1. Sean $1 \leq s < r = \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Entonces para algún $1 \leq i_0 \leq N$,

$$\left(\max_{1\leq i\leq N} |x_i|\right)^s = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|^s = |x_{i_0}|^s \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^s.$$

De donde

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \|x\|_s.$$

Sean ahora $1 \leq s \leq r < \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\|x\|_s = 1$. En particular, $|x_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq N$. Por tanto,

$$|x_i|^r \leq |x_i|^s$$

para todo $1 \leq i \leq N$. Y así

$$\|x\|_r^r = \sum_{i=1}^N |x_i|^r \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^s = \|x\|_s^s = 1.$$

Esto es,

$$\|x\|_r^r \leq 1.$$

Ahora, sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ y $x \neq 0$. Hacemos $y = \frac{x}{\|x\|_s}$. Entonces $\|y\|_s = 1$ y en consecuencia, por lo hecho arriba,

$$\frac{\|x\|_r}{\|x\|_s} = \|y\|_r \leq 1,$$

esto es,

$$\|x\|_r \leq \|x\|_s.$$

Y desde luego, si $x = 0$, $\|x\|_r = 0 = \|x\|_s$.

2. Si $r = s$, la desigualdad es evidente.

Sean $1 \leq s < r < \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Hacemos $p = \frac{r}{s}$ y $q = \frac{r}{r-s}$, así $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^N$ (proposición 1.1),

$$\begin{aligned}
\|x\|_s^s &= \sum_{i=1}^{N} |x_i|^s \\
&= \sum_{i=1}^{N} (|x_i|^s)(1) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^{sp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} (1)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^r \right)^{\frac{s}{r}} N^{\frac{r-s}{r}} \\
&= \|x\|_r^s N^{\frac{r-s}{r}}.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\|x\|_s \leq N^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r.$$

3. Sean $1 \leq s < \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Entonces

$$\|x\|_s^s = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^s \leq \sum_{i=1}^{N} \|x\|_\infty^s = N \|x\|_\infty^s.$$

Así,

$$\|x\|_s \leq N^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty.$$

□

1.2. Espacios L^p

Definición 1.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular, suave y acotado y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. Definimos el conjunto $L^p(\Omega)$ como el conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ las cuales*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Este espacio tiene norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Definición 1.4. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. Definimos el conjunto $L^\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y existe una constante C tal que $|f(x)| \leq C$ casi en todas partes en Ω.*

Podemos asociar la siguiente norma a L^∞,

$$\|f\|_\infty = \|f\|_\infty = \text{ínf}\{C : |f(x)| \leq C\}$$

casi en todas partes en Ω.

Definición 1.5. *Sea $1 \leq p < \infty$, denotamos por p' el exponente conjugado tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tenemos un resultado que será esencial para trabajar en los espacios L^p

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p, q \in [1, \infty]$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Demostración. 1. Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f = 0$ o si $g = 0$ se da la igualdad. Supongamos que ambas funciones son distintas de cero. Se tiene entonces que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$ y $\|g\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$. Para cada $x \in \Omega$ definamos

$$a_x = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \qquad \text{y} \qquad b_x = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}.$$

Aplicando la desigualdad de Young (ver Lema 1.1) obtenemos lo siguiente

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}},$$

es decir,

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \left(\frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} |f(x)|^p + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} |g(x)|^q \right). \tag{1.2}$$

Como $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, el lado derecho de la desigualdad (1.2) es integrable, y además, $|fg|$ es integrable. En consecuencia, $fg \in L^1(\Omega)$. Integrando la desigualdad (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \left(\frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \int_\Omega |f|^p + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \int_\Omega |g|^q \right) \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \left(\frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \|g\|^q_{L^q(\Omega)} \right) \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},
\end{aligned}$$

como afirma el enunciado.

2. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$, entonces $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}|g|$ es integrable. Como $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces $|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}|g|$ c.t.p. $x \in \Omega$. fg es integrable, con lo que $fg \in L^1(\Omega)$. Integrando la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Esto concluye la prueba.

□

En particular, podemos se cumple el siguiente resultado

Proposición 1.3 (Desigualdad de interpolación)**.** *Sean* $1 \leq p < r < q < \infty$. *Si* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *entonces* $f \in L^r(\Omega)$ *y se cumple que:*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

donde $\alpha \in (0,1)$ *satisface que* $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Demostración. Como $p < r < q$, entonces $\frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{1}{p}$. Como $\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$ es convexo, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$. Por tanto

$$\begin{aligned} |f|^r &= |f|^{r\alpha + r - r\alpha} \\ &= |f|^{r\alpha} |f|^{r(1-\alpha)} \\ &= |f|^{p\frac{r\alpha}{p}} |f|^{q\frac{r(1-\alpha)}{q}}. \end{aligned}$$

Podemos observar que $|f|^{p\frac{r\alpha}{p}} \in L^{\frac{p}{r\alpha}}(\Omega)$ y $|f|^{q\frac{r(1-\alpha)}{q}} \in L^{\frac{q}{r(1-\alpha)}}(\Omega)$, además

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{p}{r\alpha}} + \frac{1}{\frac{q}{r(1-\alpha)}} &= \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q} \\ &= r\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}\right) \\ &= r\frac{1}{r} \\ &= 1, \end{aligned}$$

con lo que $\frac{p}{r\alpha}$ y $\frac{q}{r(1-\alpha)}$ son conjugados. Por lo tanto, a partir de la desigualdad de Hölder (teorema 1.1) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^{p\frac{r\alpha}{p}} |f|^{q\frac{r(1-\alpha)}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega (|f|^{p\frac{r\alpha}{p}})^{\frac{p}{r\alpha}}\right)^{\frac{r\alpha}{p}}\right]^{\frac{1}{r}} \left[\left(\int_\Omega (|f|^{q\frac{r(1-\alpha)}{q}})^{\frac{q}{r(1-\alpha)}}\right)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{1-\alpha}{q}} \\
&= \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

concluyendo la prueba. □

Teorema 1.2. *Sea $\{f_k\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$. Si $p \in [1, \infty)$, existen una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ de $\{f_k\}$ y una función $g \in L^p(\Omega)$ tales que*

$$f_{k_j}(x) \to f(x) \quad c.t.p\ x \in \Omega,$$

$$|f_{k_j}(x)| \leq g(x) \quad c.t.p\ x \in \Omega,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como $\{f_k\}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, escogemos $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < k_{i+1} < \cdots$ tales que

$$\|f_m - f_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^i}$$

si $m, k \geq k_i$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_{L^p(\Omega)} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Hagamos $f_{k_0} = 0$ y sean

$$\begin{aligned}
g_j &= \sum_{i=0}^{j-1} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| \\
g &= \sum_{i=0}^{\infty} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| = \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned}
\|g_j\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|\sum_{i=0}^{j-1} |f_{k_{i+1}} - f_{k_i}|\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{j-1} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g_j|^p &= \|g_j\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\\ &< 1.\end{aligned}$$

Por el Teorema de convergencia monótona, la función $|g|^p = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |g_j|^p$ es integrable.

Sea Z donde la función g toma valores infinitos, el cual es de medida cero, entonces

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)| < \infty$$

para todo $x \in \Omega \setminus Z$, con lo que

$$\sum_{i=0}^{\infty}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x))$$

converge para todo $x \in \Omega \setminus Z$.

Tomemos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)) & si \quad x \in \Omega \setminus Z \\ 0 & si \quad x \in Z. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dado que

$$f_{k_j}(x) = \sum_{i=0}^{j-1}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)),$$

entonces $f_{k_j}(x) \to \tilde{f}(x)$ y

$$\begin{aligned}|f_{k_j}(x)| &= \left|\sum_{i=0}^{j-1}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x))\right|\\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)|\\ &= g_j(x)\\ &\leq g(x)\end{aligned}$$

c.t.p. $x \in \Omega$. Así concluimos que existen una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ de $\{f_k\}$, y por el Teorema de convergencia dominada, funciones $\tilde{f}, g \in L^p(\Omega)$, tales que $f_{k_j}(x) \to \tilde{f}(x)$ y $|f_{k_j}(x)| \leq g(x)$

c.t.p. $x \in \Omega$ y para todo $j \in \mathbb{N}$, y $f_k \to \tilde{f}$ en $L^p(\Omega)$. Como $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$ se tiene que $f = \tilde{f}$. $\square$

Queremos comparar a los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$. A continuación veremos el siguiente resultado de comparación.

Proposición 1.4. *Si $|\Omega| < \infty$ y $1 \leq p < s \leq \infty$, entonces $L^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua. Más aún, para toda $f \in L^p(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_{L^s(\Omega)} \qquad \text{si } s \in [1,\infty) \\ \|f\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{si } s = \infty. \end{aligned}$$

Demostración. Si $1 \leq p < s < \infty$ y $f \in L^s(\Omega)$, entonces $|f|^p \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$ y

$$\begin{aligned} \||f|^p\|_{L^{\frac{s}{p}}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{s}{p}} \right)^{\frac{p}{s}} \\ &= \left(\int_\Omega |f|^s \right)^{\frac{p}{s}} \\ &= \|f\|^p_{L^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f|^p \\ &\leq |\Omega|^{\frac{s-p}{s}} \||f|^p\|_{\frac{s}{p}(\Omega)} \\ &= |\Omega|^{\frac{s-p}{s}} \|f\|^p_{L^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $f \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_{L^s(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $|f|^p \leq \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} 1_\Omega$ c.d. en Ω. Como $|\Omega| < \infty$, la función $\|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} 1_\Omega$ es integrable. Por tanto, $f \in L^p(\Omega)$. Integrando la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^p &\leq \int_\Omega \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} 1_\Omega \\ &= \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega 1_\Omega \\ &= |\Omega| \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Finalmente, si $f_k \to f$ en $L^s(\Omega)$, como las desigualdades (1.4) y (1.5) aseguran la existencia de una constante C tal que

$$\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \le C\|f_k - f\|_{L^s(\Omega)},$$

concluimos que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$. Esto prueba que la inclusión $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua. $\square$

Definición 1.6. *Si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ y $f_1, f_2, \ldots, f_m \in L^s(\Omega)$, definimos*

$$\|f\|_{L^s(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^s_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Proposición 1.5. *Si $|\Omega| < \infty$, $1 \le p < s < \infty$, y $f_1, f_2, \ldots, f_m \in L^s(\Omega)$. Entonces*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le (m|\Omega|)^{\frac{s-p}{sp}}\|f\|_{L^s(\Omega)}$$

Demostración. Como $|\Omega| < \infty$, y $p < s$, entonces por la proposición 1.4, $L^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, con lo que $f_1, f_2, \ldots, f_m \in L^p(\Omega)$. Así, a partir de la proposiciones 1.4 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{m} |\Omega|^{\frac{s-p}{s}} \|f_i\|^p_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} \left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^p_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} m^{\frac{s-p}{sp}} \left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^s_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= (m|\Omega|)^{\frac{s-p}{sp}}\|f\|_{L^s(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Espacios de Sobolev

En el estudio de ecuaciones en derivadas parciales surge de manera natural la necesidad de considerar normas que involucren, no sólo a la función misma, sino a sus derivadas. Por ejemplo, si u es una función de clase C^1 con soporte compacto en un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$, queremos pensar en la norma de dicha función en un espacio $L^p(\Omega)$. Desafortunadamente, el espacio de dichas funciones, al que denotamos $C^1_c(\Omega)$, no resulta completo con esta norma.

Los espacios de Sobolev son espacios de Banach y contienen a $C^1_c(\Omega)$ como subespacio denso. Consisten de funciones en $L^p(\Omega)$ que tienen derivadas parciales en un sentido débil y dichas derivadas débiles son elementos de $L^p(\Omega)$. De modo que pensar en una norma tiene sentido para dichas funciones.

Introduciremos ahora los espacios de Sobolev.

Definición 1.7. *Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Decimos que $g_i \in L^p(\Omega)$ es la derivada débil de u si*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi.$$

Denotaremos como $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Si u es diferenciable las derivadas débiles coinciden con las derivadas parciales.

Definición 1.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : &\ u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega \\ &\left. y\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ \forall i = 1, 2, \ldots, N \right\}. \end{aligned}$$

Estableceremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Definición 1.9. *Sea $p \in [1, \infty)$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Demotamos por*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

En el producto $[L^p(\mathbb{R}^N)]^N := L^p(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^N)$ (con N factores), $p \in [1, \infty)$, consideramos la norma

$$\|(f_1, f_2, \ldots, f_N)\|_p = (\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p + \cdots + \|f_N\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

Notemos que, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, su gradiente $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right)$ pertenece a $[L^p(\mathbb{R}^N)]^N$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Por definición, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está contenido en $L^p(\Omega)$. En el estudio de problemas no lineales surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿para qué valores q se cumple que $W^{1,p}(\Omega)$ está contenido de manera continua y compacta en $L^q(\Omega)$? A continuación estudiaremos esta cuestión.

La herramienta fundamental para este análisis son ciertas desigualdades que permiten estimar la norma en L^q de una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ en términos de la norma en L^p de su gradiente. A este tipo de desigualdades se les suele llamar desigualdades de Sobolev. Estas desigualdades se extienden por densidad a $W^{1,p}(\Omega)$ y permiten obtener encajes continuos de éste en otros espacios.

Para el estudio de estas desigualdades, estudiaremos primero el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea $N \geq 2$ y sean $f_1, f_2, \ldots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Para $x \in \mathbb{R}^N$ y $1 \leq i \leq N$ establecemos*

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1},$$

es decir, x_i es omitido de la N-ada. Entonces la función

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \cdots f_N(\tilde{x}_N)$$

con $x \in \mathbb{R}^N$, pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{1.6}$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación por inducción sobre N.

- Para $N = 2$, tenemos que $\tilde{x}_1 = x_2$ y $\tilde{x}_2 = x_1$, con lo que $f(x_1, x_2) = f_1(x_2) f_2(x_1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2) f_2(x_1)| \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2)| |f_2(x_1)| \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)| \\
&= \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

- Para $N = 3$ tenemos que $f(x) = f_1(x_2, x_3) f_2(x_1, x_3) f_3(x_1, x_2)$. Primeramente tenemos, a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en L^2,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, x_3)| \, dx_3 &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)| |f_2(x_1, x_3)| |f_3(x_1, x_2)| \, dx_3 \\
&= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)| |f_2(x_1, x_3)| \, dx_3 \\
&\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 \, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 \, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir de esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)| \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, x_3)|\, dx_3\, dx_2\, dx_1 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx_2\, dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx_2\, dx_1.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en L^2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} dx_2 \leq & \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3\, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

así,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\int_{\mathbb{R}} \left[|f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx_2 \right) dx_1 \\
\leq & \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} dx_1.
\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la desigualdad de Cauchy-Schwarz en L^2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} dx_1 \leq \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
& \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3\, dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2\, dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad = \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

así

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

- Supongamos cierta la afirmación para N y demostrémosla para $N+1$.

  Fijemos por un momento el valor de x_{N+1}. De la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N &= \int_{\mathbb{R}^N} |f_1||f_2|\cdots|f_{N+1}|\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N \\ &\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|f_1||f_2|\cdots|f_N|)^{\frac{N}{N-1}}\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N\right)^{\frac{N-1}{N}}.\end{aligned}$$

  Aplicando la hipótesis de inducción a las funciones

$$|f_1|^{\frac{N}{N-1}}, |f_2|^{\frac{N}{N-1}}, \ldots, |f_N|^{\frac{N}{N-1}}$$

  obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_1|^{\frac{N}{N-1}}|f_2|^{\frac{N}{N-1}}\cdots|f_N|^{\frac{N}{N-1}}\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{N}{N-1}},$$

  con lo que se deduce que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N &\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &= \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_N,x_{N+1})|^N\, dx_1\right. \\ &\qquad \left. dx_2, \cdots dx_N\right)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

  Ahora hagamos variar x_{N+1}. Cada una de las funciones

$$h_i(x_{N+1}) = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_N,x_{N+1})|^N\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N\right)^{\frac{1}{N}}$$

  con $1 \leq i \leq N$ están en $L^N(\mathbb{R})$ y su norma es

$$\begin{aligned}\|h_i\|_{L^N(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_N,x_{N+1})|^N\, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N\, dx_{N+1}\right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Así que, integrando la desigualdad (1.3) respecto a x_{N+1} y aplicando la desigualdad de Hölder generalizada, concluimos que $\prod_{i=1}^{N} h_i \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N+1}} |f(x)|\,dx \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} & \\
& \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N, x_{N+1})|^N \, dx_1,\, dx_2, \cdots dx_N \right)^{\frac{1}{N}} \\
& \qquad dx_{N+1} \\
&= \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left\| \prod_{i=1}^{N} h_i(x_{N+1}) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|h_i\|_{L^N(\mathbb{R})} \\
&= \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&= \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Ésta es la desigualdad deseada.

□

Definición 1.10. *Si $1 \leq p < N$ se define el exponente crítico de Sobolev como*

$$p^* = \frac{Np}{N-p}$$

Teorema 1.3 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sea $1 \leq p < N$. Entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ y existe una constante $C = C(p, N)$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.10}$$

Demostración. Consideremos el caso $p = 1$, con $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1 \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1, x_2, \ldots, x_n) \right| dt_1 \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1, x_2, \ldots, x_n) \right| dt_1.
\end{aligned}$$

Esto lo podemos hacer para x_i con $i = 1, 2, \ldots, N$, así

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dt. \tag{1.11}$$

Si $N \geq 2$, definimos

$$f_i(\tilde{x}_i) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dt \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Notemos que $f_1, f_2, \ldots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ y

$$\begin{aligned}
\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\tilde{x}_i)|\, dx_1\, dx_2\, \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1}\, \cdots dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dt_i\, dx_1\, dx_2\, \cdots dx_{i-1} \\
&\qquad dx_{i+1}\, \cdots dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dx_1 \cdots\, dx_N \\
&= \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

Elevando a la $\frac{1}{N-1}$ la desigualdad (1.11) y tomando el producto de todas estas obtenemos

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i). \tag{1.12}$$

De la desigualdad (1.12) y aplicando el lema 1.2 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i) \right) \\
&\leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \tag{1.13}$$

Como la media geométrica es menor que la media aritmética, es decir,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n},$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{N} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{N}\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.14}$$

Con esto probamos la desigualdad (1.10) para $p = 1$. Veamos el caso para $1 < p < N$, todavía con $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea $m > 1$, y consideremos a $|u|^{m-1}u$ en lugar de u. Entonces usando la desigualdad (1.13)

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} ||u|^{m-1}u|^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{mN}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^{m-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{1}{N}} \\
&= m\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{m-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{1}{N}}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con p tenemos que

$$\begin{aligned}
m\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{m-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{1}{N}} &\leq m\prod_{i=1}^{N}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{(m-1)p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]^{\frac{1}{N}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{N}} \\
&= m\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{(m-1)p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.
\end{aligned}$$

Con esto

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{mN}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq m\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(m-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}},$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{mN}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{Nm}}\right]^m &\leq m\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(m-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'(m-1)}}\right]^{m-1}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\
\|u\|^m_{L^{\frac{mN}{N-1}}} &\leq m\|u\|^{m-1}_{L^{p'(m-1)}(\mathbb{R}^N)}\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.
\end{aligned}$$

Entonces elegimos m tal que $\frac{mN}{N-1} = p'(m-1)$. Dado que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces

$$\frac{mN}{N-1} = \frac{p}{p-1}(m-1),$$

y despejando a m tenemos que

$$\begin{aligned}
m &= \frac{-p}{\frac{N(p-1)}{N-1} - p} \\
&= \frac{N-1}{N}\left(\frac{pN}{N-p}\right) \\
&= \frac{N-1}{N}p^*
\end{aligned}$$

ya que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|^m_{L^{\frac{\left(\frac{N-1}{N}p^*\right)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &\leq m\|u\|^{m-1}_{L^{\left(\frac{N-1}{N}p^*\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
\|u\|^m_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq m\|u\|^{m-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
\|u\|^m_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-m}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior y de la proposición 1.2, inciso 2, podemos obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq \left(\frac{N-1}{N} p^* \right) \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{\left(\frac{N-1}{N}p^*\right)}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{\left(\frac{N-1}{N}p^*\right)}{N} N^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{(N-1)p^*}{N} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

concluyendo que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{1.15}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Finalmente, sean $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\{u_n\}$ una sucesión en $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, es decir, $\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$, $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$, además podemso considerar $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De la desigualdad (1.15) se sigue que

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \tag{1.16}$$

para toda $m, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{u_n\}$ también es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, con lo que $u_n \to v$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Como $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, por el Teorema 1.2, existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $u_{n_j} \to v(x)$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Por tanto, $u(x) = v(x)$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Con esto, $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ y de la desigualdad (1.15), tenemos que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.17}$$

obteniendo la desigualdad buscada. $\square$

Corolario 1.1 (Encaje de Sobolev)**.** *Sea* $1 \leq p < N$*. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

para todo $q \in [p, p^*]$*, donde la inclusión es continua.*

Demostración. Dado que $q \in [p, p^*]$, podemos escribir

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

con $\alpha \in [0,1]$, y entonces usando la desigualdad de interpolación (proposición 1.3)

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Del teorema 1.3 tenemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\end{aligned} \tag{1.18}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Ahora si tenemos un conjunto abierto arbitrario acotado Ω, podemos deducir del Corolario 1.1 la siguiente desigualdad.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea* Ω *un subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^N$*. Existe una constante* $C > 0$*, que depende solo de* N, p, q *tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.19}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Además, si* $p \in [1, N)$ *entonces* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para cada* $q \in [1, p^*]$ *y la inclusión es continua.*

Demostración. Si $p \in [1, n)$ y $q \in [1, p^*]$, aplicando las desigualdades de la Proposición 1.4 y el Corolario 1.3 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p+q}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &= |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\leq C|\Omega|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

1.4. El teorema de Rellich-Kondrachov

Ahora veremos que cuando Ω es acotado y $q < p^*$, el encaje es compacto. A continuación, probaremos esta afirmación. Primero, veremos algunas definiciones relacionadas a la compacidad en L^p.

Definición 1.11. *Un subconjunto A de X es relativamente compacto en X si su cerradura $\overline{A}$ en X es compacta.*

Definición 1.12. *Una función $u : X \to Y$ entre espacios métricos es compacta si para cualquier subconjunto acotado A de X el conjunto $u(A)$ es relativamente compacto en Y.*

Definición 1.13. *Dados $\xi \in \mathbb{R}^N$ y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, denotamos por $T_\xi f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la traslación de f por ξ, es decir,*

$$T_\xi f(x) := f(x - \xi).$$

Si $p \in [1, \infty)$, veremos bajo que condiciones un subconjunto K de $L^p(\Omega)$ es compacto.

El siguiente resultado se conoce como el teorema de Fréchet-Kolmogorov. A continuación lo enunciaremos, cuya prueba puede consultarse en [4]. Aquí lo asumiremos.

Teorema 1.5 (Fréchet-Kolmogorov)**.** *Sean $p \in [1, \infty)$, Ω y ω subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ con $\omega \subset\subset \Omega$ y K un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, d(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega))$ tal que*

$$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \tag{1.20}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ con $\|\xi\| < \delta$ y para toda $f \in K$. Entonces el conjunto $K_\omega = \{f 1_\omega : f \in K\}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$.

Corolario 1.2. *Sean $p \in [1, \infty)$, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y K un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$, con las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$ existe $\delta \in (0, d(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega))$ tal que*

   $$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

   para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ con $\|\xi\| < \delta$ y para toda $f \in K$.

2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que*

   $$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$$

   para toda $f \in K$.

Entonces K es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Probaremos que K es totalmente acotado, ya que si es totalmente acotado, es relativamente compacto. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para toda $f \in K$. Por el Teorema 1.5, $K_\omega = \{f1_\omega : f \in K\}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. De modo que existen $g_1, \ldots, g_m \in K$ tales que

$$K_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{L^p(\omega)}\left(g_i 1_\omega, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Es decir, para cada $f \in K$ existe $i \in 1, \ldots, m$ tal que $\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|f - g_i\|_{L^p(\Omega)} &= \|f - f1_\omega + g_1 - g_i 1_\omega + g_i 1_\omega - g_i\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|f - f1_\omega\|_{L^p(\Omega)} + \|g_1 - g_i 1_\omega\|_{L^p(\Omega)} + \|g_i 1_\omega - g_i\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} + \|f - g_i 1_\omega\|_{L^p(\omega)} + \|g_i\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{L^p(\Omega)}\left(g_i, \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

así que K es totalmente acotado. Por tanto, K es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$. □

Para ver el Teorema de Rellich - Kondrachov, empezaremos probando el siguiente lema.

Lema 1.3. *Si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$ entonces*

$$\|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\xi\|.$$

Demostración. Sean $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $x, \xi \in \mathbb{R}^N$. Aplicando el teorema del valor medio a $f(t) = \varphi(x - t\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, para $t_0 \in (0, 1)$, tenemos que

$$\varphi(x - \xi) - \varphi(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(t_0) = -\nabla\varphi(x - t_0\xi) \cdot \xi.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
|\varphi(x - \xi) - \varphi(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi)\xi_i \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi) \right| |\xi_i| \\
&\leq \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x - t_0\xi) \right| \right).
\end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad respecto a x concluimos que

$$\begin{aligned}
\|T_\xi\varphi-\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x-\xi)-\varphi(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x-t_0\xi) \right| \right) \\
&= \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x-t_0\xi) \right| \right) \\
&= \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) \\
&= \|\xi\| \|\nabla\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, tomamos una sucesión $\{\varphi_k\}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces $\|\varphi_k - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$, $\|T_\xi\varphi_k - T_\xi u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$ y $\|\nabla\varphi_k - \nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$. De la desigualdad anterior se sigue que

$$\|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \lim_{k\to\infty} \|T_\xi\varphi_k - \varphi_k\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \lim_{k\to\infty} \|\xi\|\|\nabla\varphi_k\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|\xi\|\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

probando el resultado. □

Teorema 1.6 (Rellich-Kondrachov). *Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, N)$ y $q \in [1, p^*)$, donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta.*

Demostración. Sea A un subconjunto acotado de $W_0^{1,p}(\Omega)$. La desigualdad de Poincaré (Teorema 1.4) implica que A es un subconjunto acotado de $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$. Para proseguir con la prueba, identificamos a una función definida en un abierto con su extensión trivial a todo $\mathbb{R}^N$. Probaremos que A satisface las hipótesis (1) y (2) del corolario 1.2 cuando $q \in [1, p^*)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y ω un abierto tal que $\omega \subset\subset \Omega$. Sea $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C$ para todo $u \in A$. Como la integral es invariante bajo traslaciones se tiene que $\|T_\xi u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$ para todo $u \in A$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$). Usando la desigualdad de interpolación (Proposición 1.3), el Lema 1.3 y la Proposición 1.5, concluimos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|T_\xi u - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^\alpha \|T_\xi u - u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha} \\
&\leq \|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^\alpha \left[\|T_\xi u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\right]^{1-\alpha} \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^\alpha \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \|\xi\|^\alpha \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^\alpha \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \|\xi\|^\alpha (m|\Omega|)^{\frac{\alpha(p-1)}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\alpha \\
&\leq C_1 \|\xi\|^\alpha,
\end{aligned}$$

para toda $u \in A$, y donde α cumple la condición $\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$. Podemos observar que $\alpha > 0$ si $q \in [1, p^*)$. Tomando $\delta \in (0, d(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega))$ tal que $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{C_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_\xi u - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq C_1 \|\xi\|^\alpha \\
&< C_1 \left[\left(\frac{\varepsilon}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^\alpha \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

para toda $\xi \in \mathbb{R}^N$ con $\|\xi\| < \delta$ y para toda $u \in A$. Así, A satisface la condición (1) del corolario 1.2.

Por otro lado, la Proposición 1.4 asegura que, para cualquier abierto $\omega \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} &\leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \omega)} |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}} \\
&\leq C |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

para toda $u \in A$. Puesto que Ω es acotado y tomando $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} > 0$, podemos elegir un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \omega| < \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} &\leq\leq C |\Omega \setminus \omega|^\beta \\
&< C \left[\left(\frac{\varepsilon}{C} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^\beta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Con esto, A satisface la hipótesis (2) del corolario 1.2 cuando $q \in [1, p^*)$. Por lo tanto, A es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$. $\square$

Capítulo 2

ENCAJES DE SOBOLEV INVOLUCRANDO SIMETRÍAS

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica de los temas principales sobre los que se basan nuestros resultados. La principal referencia que usaremos será el artículo de Wang [19], donde realizaremos un anàlisis de los resultados mostrados en el mismo, el cual nos ayudará a entenderlos para poder establecer nuestros propios resultados.

2.1. Conceptos preliminares

Notación: Sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ un conjunto acotado de clase C^1 en $\mathbb{R}^N$, con $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^k$, con $k \geq 2$, una bola de radio R con centro en el origen. Con base en esto, $N = m + k$. Denotamos

$$H_s^1 = \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x_1, x_2) = w(x_1, \|x_2\|),\ \forall x_2 \in \Omega_2\}.$$

Para h una función Hölder continua no negativa en $\overline{\Omega}$, denotamos el espacio de Banach $L_h^p(\Omega)$ (espacios L^p con peso) con la norma

$$\|u\|_{L_h^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega h|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para un número entero positivo N y $p = 2$, escribimos el exponenente crítico de Sobolev

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & si \quad N > 2 \\ \infty & si \quad N \leq 2. \end{cases}$$

Denotaremos como m, k y N las dimensiones de Ω_1, Ω_2 y Ω respectivamente, en consecuencia, $N = m + k$; y

$$\nabla_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_{1_1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{1_2}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{1_m}}\right),$$
$$\nabla_2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_{2_1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{2_2}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{2_k}}\right)$$

los gradientes parciales sobre Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

Observemos que si $r = \|x_2\|$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_{2_i}} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{x_{2_i}}{\|x_2\|}$, con $i = 1, 2, \ldots, k$, con lo que

$$\begin{aligned}\nabla_2 w &= \left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{x_{2_1}}{\|x_2\|}, \frac{\partial w}{\partial r}\frac{x_{2_2}}{\|x_2\|}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial r}\frac{x_{2_k}}{\|x_2\|}\right)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_{2_1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{2_2}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{2_k}}\right)\\ &= \nabla_2 u,\end{aligned}$$

por tanto, $\nabla u = (\nabla_1 u, \nabla_2 u)$.

2.2. Lemas fundamentales

Lema 2.1. *Sea dim $\Omega_2 = k \geq 3$, entonces para $u \in H^1_s(\Omega)$, tenemos*

$$|u(x)| \leq \frac{C_k}{\|x_2\|^{\frac{k-2}{2}}}\left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $x \in \Omega$, donde C_k es una constante que depende solo de k.

Demostración. Sea $u \in H^1_s(\Omega) \cap C^\infty_c(\Omega)$, entonces $u(x_1, x_2) = w(x_1, \|x_2\|)$. Podemos ver a w como $w : \Omega_1 \times [0, R] \to \mathbb{R}$. Además, $\|x_2\| < R$. Del Teorema fundamental del cálculo obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\int_{\|x_2\|}^{R} \frac{\partial w}{\partial t}(x_1, t)\, dt &= w(x_1, R) - w(x_1, \|x_2\|)\\ &= w(x_1, R) - u(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Como $w \in C^\infty_c(\Omega)$, entonces $w(x_1, R) = 0$, con lo que

$$-u(x_1, x_2) = \int_{\|x_2\|}^{R} \frac{\partial w}{\partial t}(x_1, t)\, dt.$$

Operando y usando la desigualdad de Hölder (véase Teorema 1.1) tenemos que

$$\begin{aligned}|u(x_1, x_2)| &\leq \left|\int_{\|x_2\|}^{R} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t)\, dt\right|\\ &\leq \int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t)\right| dt\\ &= \int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t)\right| t^{\frac{k-1}{2}} t^{\frac{1-k}{2}}\, dt\\ &\leq \left(\int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t)\right|^2 t^{k-1}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\|x_2\|}^{R} t^{1-k}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Denotamos por ω_k la medida de la esfera unitaria, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t)\right|^2 t^{k-1}\,dt &= \frac{1}{k\omega_k} k\omega_k \int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right|^2 t^{k-1}\,dt \\
&= \frac{1}{k\omega_k}\int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,\|x_2\|)\right|^2 dx_2 \\
&\le \frac{1}{k\omega_k}\int_{\Omega_2} |\nabla_2 w(x_1,\|x_2\|)|^2\,dx_2 \\
&= \frac{1}{k\omega_k}\int_{\Omega_2} |\nabla_2 u(x_1,x_2)|^2\,dx_2 \\
&\le \frac{1}{k\omega_k}\int_{\Omega_2} |\nabla u(x_1,x_2)|^2\,dx_2
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_{\|x_2\|}^{R} t^{1-k}\,dt &= \left.\frac{t^{2-k}}{2-k}\right|_{\|x_2\|}^{R} \\
&= \frac{R^{2-k}}{2-k} - \frac{\|x_2\|^{2-k}}{2-k} \\
&= \frac{1}{(k-2)\|x_2\|^{k-2}} - \frac{1}{(k-2)R^{k-2}} \\
&\le \frac{1}{(k-2)\|x_2\|^{k-2}}.
\end{aligned}$$

Así

$$|u(x)| \le \frac{1}{(k-2)^{\frac{1}{2}}\|x_2\|^{\frac{k-2}{2}}}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}\omega_k^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

En el caso de $k=2$, se necesitará este lema

Lema 2.2. *Sea dim $\Omega_2 = k = 2$, y sea $b>1$ un número real, entonces para $u \in H_0^1(\Omega)$, y todo $x\in\Omega$, tenemos*

$$|u(x)| \le \frac{A_k}{\|x_2\|^{k-1}}\int_{\Omega_2}|\nabla u|, \tag{2.1}$$

$$|u(x)|^b \le \frac{bA_k}{\|x_2\|^{k-1}}\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|.$$

Demostración. Usando el mismo argumento del lema 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(x_1,x_2)| &\le \int_{\|x_2\|}^{R}\left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| dt \\
&= \int_{\|x_2\|}^{R}\left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| t^{k-1}t^{1-k}\,dt.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| t^{k-1}t^{1-k}\,dt \le \int_{\|x_2\|}^{R} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| t\,dt \left(\frac{1}{\|x_2\|^{k-1}}\right).$$

Denotamos por ω_k la medida de la esfera unitaria, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{|x_2|}^{R} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| t^{k-1}\,dt &= \frac{1}{k\omega_k} k\omega_k \int_{|x_2|}^{R} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)\right| t^{k-1}\,dt \\
&= \frac{1}{k\omega_k} \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,\|x_2\|)\right| dx_2 \\
&\le \frac{1}{k\omega_k} \int_{\Omega_2} |\nabla_2 w(x_1,\|x_2\|)| \\
&= \frac{1}{k\omega_k} \int_{\Omega_2} |\nabla_2 u(x_1,x_2)| \\
&\le \frac{1}{k\omega_k} \int_{\Omega_2} |\nabla u(x_1,x_2)|.
\end{aligned}$$

Así,

$$|u(x_1,x_2)| \le \frac{1}{\|x_2\|^{k-1}} \frac{1}{k\omega_k} \int_{\Omega_2} |\nabla u|.$$

Reemplazando u por u^b en la desigualdad (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}
|u^b| &\le \frac{A_k}{\|x_2\|^{k-1}} \int_{\Omega_2} |\nabla u^b| \\
&= \frac{A_k}{\|x_2\|^{k-1}} \int_{\Omega_2} b|u|^{b-1}|\nabla u| \\
&= \frac{bA_k}{\|x_2\|^{k-1}} \int_{\Omega_2} |u|^{b-1}|\nabla u|.
\end{aligned}$$

□

A continuación, enunciaremos un lema que será un auxiliar importante en nuestros resultados y cuya prueba se encuentra en [18]

Lema 2.3 (Lema de Sobolev). *Sean $p>1$ y $q>1$ dos números reales. Definimos λ como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{N}=2$ con $0<\lambda<N$, entonces existe una constante $K(p,q,N)$, tal que para toda $f\in L^p(\Omega)$ y $g\in L^q(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{f(x)g(y)}{\|x-y\|^\lambda}\,dx\,dy \le K(p,q,N)\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

En base al lema 2.3, definimos el siguiente operador llamado potencial de Riesz y sus propiedades.

Definición 2.1. *Sean $1 < p < \infty$ y λ un número real con $0 < \lambda < N$. Dada $u \in L^p(\Omega)$, definimos*

$$V(u)(y) = \int_\Omega \frac{u(x)}{\|x-y\|^\lambda}\, dx.$$

A continuación veremos algunas propiedades de este operador, que serán importantes para la prueba de los resultados posteriores.

Lema 2.4. *Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Si $\lambda = N-1$ en el potencial de Riesz, entonces*

$$|u(x)| \leq CV(\nabla u)(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^N$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, y escribimos $r = \|x-y\|$. Sea $\theta \in S^{N-1}$, la esfera de dimensión $N-1$ de radio 1. Introducimos coordenadas "polares"(r,θ). Dada $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, el Teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\, dr \\ &= \int_0^\infty \|x-y\|^{1-N} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) r^{N-1}\, dr. \end{aligned}$$

Con esto, podemos observar que

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^\infty \|x-y\|^{1-N} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) r^{N-1}\, dr \right| \\ &\leq \int_0^\infty \|x-y\|^{1-N} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) \right| r^{N-1}\, dr \\ &\leq \int_0^\infty \|x-y\|^{1-N} \left| \nabla u(r,\theta) \right| r^{N-1}\, dr. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Integrando la desigualdad (2.2) sobre S^{N-1}, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{S^{N-1}} |u(x)|\, d\theta &\leq \int_{S^{N-1}} \int_0^\infty \|x-y\|^{1-N} \left|\nabla u(r,\theta)\right| r^{N-1}\, dr\, d\theta \\ \omega_{N-1}|u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(r,\theta)|}{\|x-y\|^{N-1}} r^{N-1}\, dr\, d\theta \\ |u(x)| &\leq \frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(y)|}{\|x-y\|^{N-1}}\, dy \\ |u(x)| &\leq \frac{1}{\omega_{N-1}} V(\nabla u)(x). \end{aligned}$$

Ésta es la desigualdad deseada. □

Lema 2.5. *Sean Ω un conjunto acotado de clase C^1, con $\dim \Omega = N$. Entonces existe una constante positiva C tal que, para toda $u \in L^p(\Omega)$ y para $1 < r \leq \frac{Np}{N-p}$, se cumple que*

$$\|V(u)\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Para toda $g \in L^q_G(\Omega)$ con $q \geq 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, por el lema 2.3, se tiene que existe $K(p,q,N)$ tal que

$$\int_\Omega V(u)(y)g(y)\,dy \leq K(p,q,N)\|u\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe $v \in (L^q(\Omega))^*$ tal que $\|V(u)\|_{L^r(\Omega)} = \|V(u)\|_{L^{q'}(\Omega)} = \|v\|_{(L^q(\Omega))^*}$, teniendo que $L^r(\Omega) = L^{q'}(\Omega) = (L^q(\Omega))^*$, con lo que $V(u) \in L^r_G(\Omega)$. En base a esto, de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega V(u)(y)g(y)\,dy &\leq \|V(u)\|_{L^r(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\\ &= \|v\|_{(L^q(\Omega))^*}\|g\|_{L^q(\Omega)}\\ &\leq K(p,q,N)\|u\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)},\end{aligned}$$

con lo que

$$\|V(u)\|_{L^r(\Omega)} \leq K(p,q,N)\|u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.3}$$

probándose la desigualdad. □

Teorema 2.1. *Sea dim $\Omega_1 = m \geq 2$ y dim $\Omega_2 = k \geq 3$. Supongamos que $h = \|x_2\|^l$, con $l > 0$ un número real. Entonces el encaje $H^1_s(\Omega) \hookrightarrow L^q_h(\Omega)$ es compacto para $q \in (1, 2^* + \tau)$, donde $\tau = \frac{2}{n-2}\min\left\{\frac{2(k-2)}{m}, l\right\}$.*

Demostración. Sean $0 < a < 2$ y $0 < b < 2$ números reales. Para $u \in H^1_s(\Omega)$, de los lemas 2.1 y 2.4,

$$\begin{aligned}|u(x)|^b &\leq \frac{C_k^b}{\|x_2\|^{\frac{b(k-2)}{2}}}\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\\ |u(x)|^a &\leq C^a(V(\nabla_1 u))^a,\\ |u(x)|^{a+b} &\leq \frac{C^aC_k^b(V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^{\frac{b(k-2)}{2}}}\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\\ \|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} &\leq \frac{C^aC_k^b(V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^{\frac{b(k-2)}{2}-l}}\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}.\end{aligned}$$

Hagamos $\gamma = \frac{b(k-2)}{2} - l$. Así

$$\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} \leq \frac{B(V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^\gamma}\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}. \tag{2.4}$$

Integrando (2.4) sobre Ω_1

$$\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\int_{\Omega_1}\left[(V(\nabla_1 u))^a\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{2}{b}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\int_{\Omega_1}\left[(V(\nabla_1 u))^a\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\right] &\leq \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}}\left(\int_{\Omega_1}\left(\left(\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\right)^{\frac{2}{b}}\right)^{\frac{b}{2}} \\
&= \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}}\left(\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \\
&= \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}},
\end{aligned}$$

así

$$\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}. \tag{2.5}$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}} &= \left(\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2a}}\right)^{a} \\
&= \|V(\nabla_1 u)\|^a_{L^{\frac{2a}{2-b}}(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Del lema 2.5 tenemos que

$$\left(\int_{\Omega_1}(V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}} = \|V(\nabla_1 u)\|^a_{L^{\frac{2a}{2-b}}(\Omega_1)} \leq A\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}},$$

esto si $\frac{2a}{2-b} \leq 2^*_m$, es decir

$$(m-2)a + mb \leq 2m. \tag{2.6}$$

Usando esta condición, a partir de (2.5), tenemos que

$$\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^\gamma}A\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}. \tag{2.7}$$

Integrando (2.7) sobre Ω_2

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} &\leq D\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\right] \\
&= D\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right],
\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{\Omega}\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b} \leq D\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{2}{a}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right] &\leq D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \left(\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{2}{a}}\right)^{\frac{a}{2}} \\
&= D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)\right)^{\frac{a}{2}} \\
&= D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}} \\
&\leq D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}} \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)^{\frac{a}{2}} \\
&= D\left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}},
\end{aligned}
$$

así tenemos

$$
\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq D\left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}}. \tag{2.8}
$$

Analizando $D\left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}} &= k\omega_k \int_0^R t^{\frac{-2\gamma}{2-a}} t^{k-1}\, dt \\
&= k\omega_k \int_0^R t^{\frac{-2\gamma}{2-a}+k-1}\, dt \\
&= k\omega_k \left[\frac{1}{\frac{-2\gamma}{2-a}+k} t^{\frac{-2\gamma}{2-a}+k} \Big|_0^R\right] \\
&= k\omega_k \frac{1}{\frac{-2\gamma}{2-a}+k} R^{\frac{-2\gamma}{2-a}+k};
\end{aligned}
$$

el cual es una constante, y esto se cumple si $\frac{-2\gamma}{2-a}+k > 0$, es decir. $\frac{2\gamma}{2-a} < k$, o equivalentemente

$$
ka + (k-2)b < 2(k+l), \tag{2.9}
$$

entonces la expresión (2.8) se reduce a

$$
\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}}. \tag{2.10}
$$

En resumen, tenemos (2.10) si se satisfacen las condiciones (2.6) y (2.9). Estas condiciones son equivalentes a requerir que $0 < a < 2$ y $0 < b < 2$ satisfagan lo siguiente

$$
\begin{cases} (m-2)a + mb \leq 2m \\ ka + (k-2)b < 2(k+l), \end{cases} \tag{2.11}
$$

o equivalentemente, a que a, b cumplan

$$
0 < a \leq \frac{m(l+2)}{m+k-2},\ 0 < b < \frac{2m-(m-2)a}{m},
$$

$$\frac{m(l+2)}{m+k-2} \leq a < 2,\ 0 < b < \frac{2(k+l)-ka}{k-2}.$$

Como queremos que $\frac{m(l+2)}{m+k-2} < 2$, entonces $l < \frac{2k-4}{m}$. Lo que nos queda es elegir la condición adecuada a y b que verifiquen (2.11), tal que $a+b$ se aproxime a $2_n^* + \tau$. Entonces definimos

$$l^* = \min\left\{l, \frac{2k-4}{m}\right\},$$

$$\tau = \frac{2l^*}{m+k-2}.$$

Si $m \geq 3$, para $l' \in (0, l^*)$, tenemos

$$a = \frac{m(l'+2)}{m+k-2},$$

$$b = \frac{2(k+l')-l'm}{m+k-2},$$

entonces a y b verifican (2.11). Además

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{m(l'+2)}{m+k-2} + \frac{2(k+l')-l'm}{m+k-2} \\ &= \frac{2m+2k+2l'}{m+k-2} \\ &= \frac{2n}{n-2} + \frac{2l'}{m+k-2}. \end{aligned}$$

Si $l' \to l^*$, entonces $a+b \to 2^* + \tau$.

Si $m = 2$, entonces, para $l' \in (0, l^*)$, $\frac{2(2+l')}{k} < 2$, con lo que $\frac{2+l'}{k} < 1$. Además, tenemos que

$$a = \frac{2(l'+2)}{k},$$

$$b = 2,$$

y

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{2(l'+2)}{k} + 2 \\ &= \frac{2k+2(2+l')}{k} \\ &= \frac{4+2k+2l'}{k} \\ &= \frac{2n}{n-2} + \frac{2l'}{k}. \end{aligned}$$

Si $l' \to l^*$, entonces $a+b \to 2^* + \tau$. $\square$

2.3. El caso en dimensiones bajas

Teorema 2.2. *Supongamos que dim* $\Omega_1 = m \geq 2$ *y dim* $\Omega_2 = k = 2$*. Sea* $h = \|x_2\|^l$*, con* $l > 0$ *un número real. Entonces el encaje* $H^1_s(\Omega) \hookrightarrow L^q_h(\Omega)$ *es compacto para* $q \in (1, 2^* + \tau)$*, donde* $\tau = \frac{2}{m} \min\left\{l, \frac{1}{m}\right\}$.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $b > 1$ números reales. Para $u \in H^1_s(\Omega) \cap C^1_c(\Omega)$, de los lemas 2.2 y 2.4,

$$\begin{aligned}
(|u(x)|^b)^\beta &\leq \frac{(bA_k)^\beta}{\|x_2\|^\beta} \left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \\
(|u(x)|^b)^\alpha &\leq C^\alpha (V(|u|^{b-1} \nabla_1 u))^\alpha, \\
|u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq \frac{C^\alpha (bA_k)^\beta (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha}{\|x_2\|^\beta} \left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \\
\|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq \frac{E (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha}{\|x_2\|^{\beta-l}} \left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta.
\end{aligned}$$

Integrando sobre Ω_1 tenemos que

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \int_{\Omega_1} \left[(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha \left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \right].$$

Como $\beta < 1$, $\frac{1}{\beta} > 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{\beta}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \int_{\Omega_1} \left[(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha \left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \right] &\leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left(\int_{\Omega_1} \left(\left(\int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^\beta \\
&= \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left(\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \\
&= \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left(\int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}} \left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left(\int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta. \tag{2.12}$$

Hagamos $\gamma = \beta - l$. Por un lado,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} &= \left(\left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \right)^\alpha \\
&= \|V(|u|^{b-1}\nabla_1 u)\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha}{1-\beta}}(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Del lema 2.5 tenemos que

$$\left(\int_{\Omega_1} (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} = \|V(|u|^{b-1}\nabla_1 u)\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha}{1-\beta}}(\Omega_1)} \leq A \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha,$$

esto si $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq \frac{m}{m-1}$, es decir
$$(m-1)\alpha + m\beta \leq m. \tag{2.13}$$
Usando esta condición, a partir de (2.12), tenemos que
$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq \frac{D}{\|x_2\|^\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta. \tag{2.14}$$
Integrando (2.14) sobre Ω_2
$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq D \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \right] \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right],\end{aligned}$$
con lo que
$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right].$$
Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{\alpha}$ tenemos que
$$\begin{aligned} D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right] &\leq D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\Omega_2} \left(\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right) \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \\ &\leq D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$
así tenemos
$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{\alpha+\beta}. \tag{2.15}$$
Analizando $D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha}$
$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} &= 2\omega_2 \int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} t \, dt \\ &= 2\omega_2 \int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+1} \, dt \\ &= 2\omega_2 \left[\frac{1}{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2} t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2} \Big|_0^R \right] \\ &= 2\omega_2 \frac{1}{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2} R^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2}; \end{aligned}$$

el cual es una constante, y esto se cumple si $\frac{-\gamma}{1-\alpha}+1>1$, es decir. $\frac{\gamma}{1-\alpha}<2$, o equivalentemente

$$2\alpha+\beta<2+l, \tag{2.16}$$

entonces la expresión (2.15) se reduce a

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq B\left(\int_\Omega |u|^{b-1}|\nabla u|\right)^{\alpha+\beta}. \tag{2.17}$$

Usando la desigualdad de Hölder en (2.17) con $p=2$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq B\left(\int_\Omega |u|^{b-1}|\nabla u|\right)^{\alpha+\beta}\\ &\leq B\left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Si $2(b-1)\leq 2_n^*$, entonces, como $n=m+2$, tenemos que

$$b\leq \frac{2(m+1)}{m}, \tag{2.18}$$

entonces de la desigualdad de Sobolev (Teorema 1.3), tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{1}{2(b-1)}} &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ \left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{1}{(b-1)}} &\leq C\int_\Omega |\nabla u|^2\\ \int_\Omega |u|^{2(b-1)} &\leq C^{b-1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{b-1}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

A partir de las desigualdades (2.17), (2.19) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq BC^{b-1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{(b-1)\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\\ &= A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b(\alpha+\beta)}{2}}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

En resumen, tenemos (2.20) si se satisfacen las condiciones (2.13), (2.16) y (2.18). Estas condiciones son equivalentes a requerir que $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ y $b>1$ satisfagan lo siguiente

$$\begin{cases}(m-1)\alpha+m\beta\leq m\\ 2\alpha+\beta<2+l\\ b\leq\frac{2(m+1)}{m}\end{cases} \tag{2.21}$$

o equivalentemente, a que α, β cumplan

$$0<\alpha\leq\frac{m(1+l)}{m+1},\ 0<\beta<1-\frac{m-1}{m}\alpha,$$

$$\frac{m(1+l)}{m+1} \leq \alpha < 1, \; 0 < \beta < 2 + l - 2\alpha.$$

Como queremos que $\frac{m(1+l)}{m+1} < 1$, entonces $l < \frac{1}{m}$. Lo que nos queda es elegir la condición adecuada tal que α y β verifiquen (2.21). Entonces definimos

$$l^* = \text{mín}\left\{l, \frac{1}{m}\right\},$$

$$\tau = \frac{2}{m}l^*,$$

y para $\eta > 0$, hagamos

$$\alpha = \frac{m(1+l^*) - \eta}{m+1},$$

$$\beta = \frac{2 - (m-1)l^*}{m+1},$$

$$b = \frac{2(m+1)}{m},$$

entonces α, β y b verifican (2.21). Además

$$\begin{aligned} b(\alpha+\beta) &= \frac{2(m+1)}{m}\left[\frac{m(1+l^*) - \eta + 2 - (m-1)l^*}{m+1}\right] \\ &= \frac{2}{m}[m + l^* + 2 - \eta] \\ &= \frac{2(m+2+l^*)}{m} - \frac{2\eta}{m} \\ &= \frac{2(m+2)}{m} + \frac{2l^*}{m} - \frac{2\eta}{m} \\ &= 2_n^* + \tau - \frac{2\eta}{m}. \end{aligned}$$

Si $\eta \to 0$, $b(\alpha+\beta) \to 2_n^* + \tau$. □

Teorema 2.3. *Sea* $\dim\,\Omega_1 = m = 1$ *y* $\dim\,\Omega_2 = k \geq 2$. *Supongamos que* $h = \|x_2\|^l$, *con* $l > 0$ *un número real. Entonces el encaje* $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^q(\Omega)$ *es compacto para* $q \in (1, 2_n^* + \tau)$, *donde* $\tau = \text{mín}\left\{\frac{2l}{k-1}, 2\right\}$.

Demostración. Sean $b > 1$ y $0 < c < 1$ números reales. Para $u \in H_s^1(\Omega)$, de los lemas 2.2 y 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} |u(x)|^b &\leq \frac{bA_k}{\|x_2\|^{k-1}} \int_{\Omega_2} |u|^{b-1}|\nabla u| \\ |u(x)|^{bc} &\leq C\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1}|\nabla u|\right)^c \\ |u(x)|^{b+bc} &\leq \frac{CbA_k}{\|x_2\|^{k-1}}\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1}|\nabla u|\right)^c \int_{\Omega_2} |u|^{b-1}|\nabla u| \\ \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} &\leq \frac{D}{\|x_2\|^{k-1-l}}\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1}|\nabla u|\right)^c \int_{\Omega_2} |u|^{b-1}|\nabla u|. \end{aligned}$$

Hagamos $\gamma = k - 1 - l$. Integrando sobre Ω_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} &\leq \frac{D}{\|x_2\|^\gamma} \int_{\Omega_1} \left[\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \right] \\
&= \frac{D}{\|x_2\|^\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |u|^{b-1} |\nabla u| \\
&= \frac{D}{\|x_2\|^\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u|.
\end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior sobre Ω_2

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} &\leq D \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right] \\
&= D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \right],
\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{\Omega} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{c}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^c \right] &\leq D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-c} \left(\int_{\Omega_2} \left(\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \right)^{\frac{1}{c}} \right)^c \\
&= D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla u| \right) \right)^c \\
&= D \int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-c} \left(\int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^c \\
&= D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-c} \left(\int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{1+c},
\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\int_{\Omega} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-c} \left(\int_{\Omega} |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{1+c} \tag{2.22}$$

Analizando $D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} \right)^{1-c}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-c}} &= k\omega_k \int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-c}} t^{k-1} \, dt \\
&= k\omega_k \int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-c} + k - 1} \, dt \\
&= k\omega_k \left[\frac{1}{\frac{-\gamma}{1-c} + k} t^{\frac{-\gamma}{1-c} + k} \Big|_0^R \right] \\
&= k\omega_k \frac{1}{\frac{-\gamma}{1-c} + k} R^{\frac{-\gamma}{1-c} + k};
\end{aligned}$$

el cual es una constante si $\frac{-\gamma}{1-c} + k > 0$, es decir. $\frac{\gamma}{1-c} < k$, o equivalentemente

$$kc < 1 + l, \tag{2.23}$$

entonces la expresión (2.22) se reduce a

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq B \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{1+c}. \tag{2.24}$$

Para seguir estimando, supongamos ahora que $2(b-1) \leq 2_n^*$, esto es

$$b \leq \frac{2k}{k-1} \tag{2.25}$$

Usando desigualdad de Hölder con $p = 2$ tenemos que

$$\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \leq \left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

así,

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq B \left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)} \right)^{\frac{1+c}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1+c}{2}}. \tag{2.26}$$

De la desigualdad de Sobolev (Teorema 1.3) tenemos que

$$\left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)} \right)^{\frac{1}{2(b-1)}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_\Omega |u|^{2(b-1)} \right)^{\frac{1}{(b-1)}} \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2$$

$$\int_\Omega |u|^{2(b-1)} \leq C^{b-1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{b-1}. \tag{2.27}$$

De las desigualdades (2.26) y (2.27) llegamos a

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq BC^{b-1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{(b-1)\frac{1+c}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1+c}{2}}.$$

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(1+c)} \leq A \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b(1+c)}{2}}, \tag{2.28}$$

siempre y cuando las condiciones (2.23) y (2.25) se satisfagan.

Definimos

$$l^* = \text{mín} \{l, k-1\},$$

$$\tau = \frac{2l^*}{k-1},$$

$$c = \frac{1 + l^* - \eta}{k},$$
$$b = \frac{2k}{k-1},$$

donde η es un número positivo pequeño. Tales c y b satisfacen las desigualdades (2.23) y (2.25). Con esto

$$\begin{aligned} b(1+c) &= \frac{2k}{k-1}\left(1 + \frac{1 + l^* - \eta}{k}\right) \\ &= \frac{2k}{k-1}\left(\frac{k + 1 + l^* - \eta}{k}\right) \\ &= \frac{2(k + 1 + l^* - \eta)}{k} \\ &= \frac{2 + 2k}{k-1} + \frac{2l^*}{k-1} - \frac{2\eta}{k-1}. \end{aligned}$$

Si $\eta \to 0$, $b(1+c) \to 2^* + \tau$. $\square$

Capítulo 3

RESULTADOS

En este capítulo enunciaremos los resultados obtenidos en nuestra investigación.

3.1. Conceptos previos

En esta sección presentaremos las notaciones y el material de fondo que utilizaremos a continuación.

Definición 3.1. *Sean G un grupo y $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que X es G-invariante si $gx \in X$ para toda $x \in X$, $g \in G$.*

Definición 3.2. *Una función $h : X \to \mathbb{R}$ es G-invariante si $h(gx) = h(x)$ para toda $x \in X$, $g \in G$.*

Definición 3.3. *Para G un grupo y x un punto en Ω, denotamos por*

$$O_G^x = \{g(x) : g \in G\}$$

la órbita de x bajo la acción de G.

Denotamos por $\mathcal{O}(n)$ el grupo ortogonal de dimensión n. Si G denota un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(n)$, y dado un conjunto abierto Ω de clase C^1, establecemos

$$L_G^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u \circ g = u, \forall g \in G\}$$

con la norma usual

$$\|u\|_{L_G^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A continuación, damos la siguiente definición, la cual también se puede encontrar en [13], [12].

Definición 3.4. *Para $p \geq 1$ un número real, n y k dos enteros positivos, con $n \geq 2$ y $0 \leq k \leq n-1$. Escribimos el exponente crítico de Sobolev $p_k^* = p^*(n,k,p)$*

$$p_k^* = \begin{cases} \frac{(n-k)p}{n-k-p} & si \quad n-k > p, \\ \infty & si \quad n-k \leq q. \end{cases}$$

Podemos observar que $p_k^* > p^*$, y si $k = 0$, tenemos el exponenete crítico convencional.

Tomando $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ con las condiciones descritas en el capítulo 2; y consideraremos G un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(m)$ actuando en Ω_1. Denotamos por

$$H^1_{s,G} = \{u \in H^1_s(\Omega) : \forall g \in G, u(gx_1, x_2) = u(x_1, x_2)\}.$$

3.2. Lemas principales

Para los siguientes resultados, retomaremos la definición 2.1. A continuación, enunciaremos una propiedad fundamental del mismo. Para ver esta propiedad de nuestro operador involucrando la acción de grupos, necesitaremos el siguiente resultado que se enuncia a continuación, cuya prueba se encuentra en [12]

Lema 3.1 (Hebey-Vaugon, 1997)**.** *Sea Ω un variedad acotada de clase C^1 en $\mathbb{R}^N$, y sea G un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(N)$. Sea $x \in \Omega$ y sea $\delta = dim O^x_G$. Supongamos que $\delta \geq 1$. Entonces existe una carta coordenada (A, ϕ) en x tal que:*

1. *$\phi(A) = U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^\delta$ y V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{N-\delta}$,*
2. *Para todo $y \in A$, $U \times \Pi_2(\phi(y)) \subset \phi(O^y_G \cap A)$, donde $\Pi_2 : \mathbb{R}^\delta \times \mathbb{R}^{N-\delta} \to \mathbb{R}^{N-\delta}$ es la segunda proyección.*

Lema 3.2. *Sean Ω un conjunto acotado de clase C^1, con dim $\Omega = N$, G un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(N)$ actuando en Ω y $k = \min_{x\in\overline{\Omega}}$ dim O^x_G. Entonces existe una constante positiva C tal que, para toda $u \in L^p_G(\Omega)$ y para $1 < r \leq \frac{p(N-k)}{N-k-p}$, se cumple que*

$$\|V(u)\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p_G(\Omega)},$$

donde V es el operador de la definición 2.1.

Demostración. Por el lema 3.1 tenemos que Ω es cubierta por un número finito de cartas (A_l, ϕ_l) con ϕ_l es un difeomorfismo de clase C^1 para cada $l = 1, 2, \ldots, m$, y además:

1. $\phi_l(A_l) = U_l \times V_l$, donde U_l es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{\delta_l}$ y V_l es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{N-\delta_l}$, con $\delta_l \in \mathbb{N}$ y $\delta_l \geq k$,
2. U_l y V_l son acotados, y V_l tiene frontera suave,
3. Para todo $y \in A_l$, $U_l \times \Pi_2(\phi_l(y)) \subset \phi_l(O^x_G \cap A_l)$, donde $\Pi_2 : \mathbb{R}^{\delta_l} \times \mathbb{R}^{N-\delta_l} \to \mathbb{R}^{N-\delta_l}$ es la proyección sobre la segunda coordenada.

Consideremos $\overline{\Omega}$, el cual es compacto pues Ω es acotado. Sin perdida de generalidad, supongamos que ϕ_l esta definida en un conjunto abierto y acotado $\tilde{A}_l$ de clase C^1, con $\overline{A}_l \subset \tilde{A}_l$, y tal que $\phi_l(\tilde{A}_l) = \tilde{U}_l \times \tilde{V}_l$ con $\overline{U}_l \subset \tilde{U}$ y $\overline{V}_l \subset \tilde{V}$, con $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ conjuntos abiertos, acotados y de clase C^1, es decir, $\phi_l : \tilde{A}_l \to \phi_l(\tilde{A}_l)$.

De lo anterior, dado que $\overline{A}_l$ es compacto y ϕ_l es un difeomorfismo de clase C^1, $\phi_l(\overline{A}_l)$ es compacto y $\det(\phi_l^{-1})'(x)$ es continua sobre $\phi_l(\overline{A}_l)$, con lo que alcanza su máximo y mínimo, es decir, para cada $l = 1, 2, \ldots, m$, existen números reales positivos C_l y D_l tal que

$$C_l \leq |\det(\phi_l^{-1})'(x)| \leq D_l. \tag{3.1}$$

Sea $u \in L^p_G(\Omega)$. de acuerdo con el punto 3, y dado que u es $G-$invariante, se tiene que para cualquier l, cualesquiera $x, x' \in U_l$, y cualquier $y \in V_l$, $u(\phi_l^{-1}(x, y)) = u(\phi_l^{-1}(x', y))$. En consecuencia, para cualquier l existe $\tilde{u}_l \in L^p(\mathbb{R}^{m-\delta_l})$ tal que para cualquier $x \in U_l$ y cualquier $y \in V_l$,

$$u(\phi_l^{-1}(x, y)) = \tilde{u}_l(y). \tag{3.2}$$

Tenemos que para cualquier l y cualquier número real $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{A_l} |u(x)|^p \, dx &= \int_{U_l \times V_l} |u(\phi_l^{-1}(v_1, v_2))|^p |\det(\phi_l^{-1})'(v_1, v_2)| \, dv_1 \, dv_2 \\
&\leq D_l \int_{U_l \times V_l} |u(\phi_l^{-1}(v_1, v_2))|^p \, dv_1 \, dv_2 \\
&= D_l \int_{U_l} dv_1 \int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p \, dv_2 \\
&= D_l |U_l| \int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p \, dv_2 \\
&= \tilde{D}_l(U_l) \int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p \, dv_2,
\end{aligned}$$

donde D_l y $\tilde{D}_l$ son constantes positivas las cuales no dependen de u. Por tanto,

$$\left(\int_{A_l} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq E_l \left(\int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p \, dv_2 \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Similarmente, se tiene que para cualquier l y cualquier $p \geq 1$,

$$\left(\int_{A_l} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq C_l \left(\int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p \, dv_2 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

donde C_l es una constante positiva la cual no dependen de u.

Sean $p > 1$ y $r > 1$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{p} - 1$. Denotemos por $h(y) = V(u)(y)$. A partir del lema 2.3, con $\lambda = N - 1$, dado que $u \in L^p_G(\Omega)$, y para toda $g \in L^q_G(\Omega)$ con $q \geq 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene que existe $K(p, q, N)$ tal que

$$\int_\Omega h(y) g(y) \, dy \leq K(p, q, N) \|u\|_{L^p_G(\Omega)} \|g\|_{L^q_G(\Omega)}.$$

Por el teorema de representación de Riesz, tenemos que $L^r_G(\Omega) = L^{q'}_G(\Omega) = (L^q_G(\Omega))^*$, y existe $v \in (L^q_G(\Omega))^*$ tal que $\|h\|_{L^r_G(\Omega)} = \|h\|_{L^{q'}_G(\Omega)} = \|v\|_{(L^q_G(\Omega))^*}$, por lo tanto $h \in L^r_G(\Omega)$.

A partir de lo anterior, usando un argumento similar, dado que $h \in L^r_G(\Omega)$. con lo que h es $G-$invariante, se tiene que para cualquier l, cualesquiera $u_1, u_1' \in U_l$, y cualquier $u_2 \in V_l$, $h(\phi_l^{-1}(u_1,u_2)) = h(\phi_l^{-1}(u_1',u_2))$. En consecuencia, para cualquier l existe $\tilde{h}_l \in L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l})$ tal que para cualquier $u_1 \in U_l$ y cualquier $u_2 \in V_l$,

$$h(\phi_l^{-1}(u_1,u_2)) = \tilde{h}_l(u_2). \tag{3.4}$$

Tenemos que para cualquier l y cualquier número real $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{A_l} |h(y)|^r \, dy &= \int_{U_l \times V_l} |h(\phi_l^{-1}(u_1,u_2))|^r |\det(\phi_l^{-1})'(u_1,u_2)| \, du_1 \, du_2 \\
&\leq D_l \int_{U_l \times V_l} |h(\phi_l^{-1}(u_1,u_2))|^r \, du_1 \, du_2 \\
&= D_l \int_{U_l} du_1 \int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r \, du_2 \\
&= D_l |U_l| \int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r \, du_2 \\
&= \tilde{D}_l(U_l) \int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r \, du_2,
\end{aligned}$$

donde D_l y $\tilde{D}_l$ son constantes positivas las cuales no dependen de h. Por tanto

$$\left(\int_{A_l} |h(y)|^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq F_l \left(\int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r \, du_2 \right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.5}$$

Dado que $\tilde{h}_l \in L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l})$, y dadas $p > 1$ y $r > 1$ descritas anteriormente, a partir del lema 2.3, con $\lambda = N - \delta_l - 1$, dado que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^{N-\delta_l})$, y para toda $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l})$ con $q \geq 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene que existe $K(p,q,N-\delta_l)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-\delta_l}} \tilde{h}_l(y)\tilde{g}(y) \, dy \leq K(p,q,N-\delta_l) \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \|\tilde{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l})}.$$

Por el teorema de representación de Riesz, tenemos que $L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l}) = L^{q'}(\mathbb{R}^{N-\delta_l}) = (L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l}))^*$, y para toda $\tilde{v} \in (L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l}))^*$, $\|\tilde{h}\|_{L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} = \|\tilde{h}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} = \|\tilde{v}\|_{(L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l}))^*}$. En base a esto, de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-\delta_l}} \tilde{h}(y)\tilde{g}(y) \, dy &\leq \|\tilde{h}\|_{L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \|\tilde{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \\
&= \|\tilde{v}\|_{(L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l}))^*} \|\tilde{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \\
&\leq K(p,q,N-\delta_l) \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \|\tilde{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-\delta_l})},
\end{aligned}$$

con lo que

$$\|\tilde{h}\|_{L^r(\mathbb{R}^{N-\delta_l})} \leq K(p,q,N-\delta_l) \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-\delta_l})}. \tag{3.6}$$

Usando la desigualdad (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_l} |h(y)|^r\, dy\right)^{\frac{1}{r}} &\leq F_l \left(\int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r\, du_2\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq F_l K \left(\int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p\, dv_2\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Si $N-\delta_l > p$, entonces para cualquier $1 \leq r \leq \frac{(N-\delta_l)p}{N-\delta_l-p}$ tal que para cualquier $u \in L^p_G$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_l} |h(y)|^r\, dy\right)^{\frac{1}{r}} &\leq F_l \left(\int_{V_l} |\tilde{h}_l(u_2)|^r\, du_2\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq F_l K \left(\int_{V_l} |\tilde{u}_l(v_2)|^p\, dv_2\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{F_l}{C_l} K \left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Así tenemos que $N-\delta_l \leq N-k$, con lo que $p^*(N,\delta_l,p) \geq p^*(n,k,p)$. Además, como (A_l,ϕ_l) es una cubierta para $\overline{\Omega}$, si $X = \bigcup_{l=1}^{m} A_l$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega} |h(y)|^r\, dy\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int_{X} |h(y)|^r\, dy\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq \sum_{l=1}^{m} \left(\int_{A_l} |h(y)|^r\, dy\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq \sum_{l=1}^{m} \frac{F_l}{C_l} K \left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sum_{l=1}^{m} K_l \left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Además

$$\begin{aligned}K_l(p,q,N-\delta_l)\left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq K_l(p,q,N-\delta_l)\left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ \sum_{l=1}^{m} K_l(p,q,N-\delta_l)\left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{l=1}^{m} K_l(p,q,N-\delta_l)\left(\int_{\Omega} |u(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ \sum_{l=1}^{m} K_l(p,q,N-\delta_l)\left(\int_{A_l} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq A\left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Así, de las desigualdades (3.7) y (3.8) se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |h(y)|^r\,dy\right)^{\frac{1}{r}} &\le \sum_{l=1}^{m} K_l(p,q,m)\left(\int_{A_l} |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le C\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

es decir

$$\|V(u)\|_{L^r(\Omega)} \le C\|u\|_{L^p_G(\Omega)}. \tag{3.9}$$

□

3.3. Principales resultados y sus pruebas

Para el estudio de los siguientes resultados, primero observaremos lo siguiente. Sean

$$\tau = \frac{2}{n-2}\left(\frac{2(j-2)}{m}\right) = \frac{4(j-2)}{m(n-2)}, \tag{3.10}$$

y

$$\psi = \frac{2}{n-k-2}\left(\frac{2(j-2)}{m-k}\right) = \frac{4(j-2)}{(m-k)(n-k-2)}. \tag{3.11}$$

Veremos que ocurre con

$$4(j-2)m(n-2) - 4(j-2)(n-k-2)(m-k).$$

$$\begin{aligned}4(j-2)m(n-2) - 4(j-2)(n-k-2)(m-k) &= 4(j-2)[m(n-2) - (m-k-2)(m-k)]\\ &= 4(j-2)[mn - 2m - (nm - km - 2m - kn + k^2 + 2k]\\ &= 4(j-2)[mn - 2m - nm + km + 2m + kn - k^2 - 2k]\\ &= 4(j-2)[km + kn - k^2 - 2k]\\ &= 4(j-2)[k(m+n-2) - k^2],\end{aligned}$$

y $4(j-2)[k(m+n-2)-k^2 > 0$ si y sólo si $0 < k < m+n-2$. Como estamos considerando $1 \le k < n$, bastará con pedir que $m \ge 2$ para que $n+m-2 \ge n$, y con esto tener que $4(j-2)[k(m+n-2)-k^2 > 0$, probando que $\psi \ge \tau$. En base a esto, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sean dim $\Omega_1 = m \ge 2$ y dim $\Omega_2 = j \ge 3$, G un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(m)$ actuando en Ω_1 y $k = \min_{x\in\overline{\Omega_1}}$ dim O^x_G. Supongamos que $h = \|x_2\|^l$, con $l > 0$ un número real. Entonces el encaje $H^1_{s,G}(\Omega) \hookrightarrow L^q_h(\Omega)$ es compacto para $q \in (1, 2^*_k + \tau)$, donde $\tau = \frac{2}{n-k-2}\min\left\{\frac{2(j-2)}{m-k}, l\right\}$.*

Demostración. Sean $0 < a < 2$ y $0 < b < 2$ números reales. Para $u \in H^1_{s,G}(\Omega)$, de los lemas 2.1 y 2.4,

$$\begin{aligned}
|u(x)|^b &\leq \frac{C_j^b}{\|x_2\|^{\frac{b(j-2)}{2}}} \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \\
|u(x)|^a &\leq C^a (V(\nabla_1 u))^a, \\
|u(x)|^{a+b} &\leq \frac{C^a C_j^b (V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^{\frac{b(j-2)}{2}}} \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \\
\|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} &\leq \frac{C^a C_j^b (V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^{\frac{b(j-2)}{2} - l}} \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}}.
\end{aligned}$$

Hagamos $\gamma = \frac{b(j-2)}{2} - l$. Así

$$\|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq \frac{B(V(\nabla_1 u))^a}{\|x_2\|^{\gamma}} \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}}. \tag{3.12}$$

Integrando (3.12) sobre Ω_1

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \int_{\Omega_1} \left[(V(\nabla_1 u))^a \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{2}{b}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \int_{\Omega_1} \left[(V(\nabla_1 u))^a \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \right] &\leq \frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2}} \left(\int_{\Omega_1} \left(\left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \right)^{\frac{2}{b}} \right)^{\frac{b}{2}} \\
&= \frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2}} \left(\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \\
&= \frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}},
\end{aligned}$$

así

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^{\gamma}} \left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b}{2}}. \tag{3.13}$$

Analizando el lado derecho de la desigualdad (3.13) vemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2}} &= \left(\left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}} \right)^{\frac{2-b}{2a}} \right)^{a} \\
&= \|V(\nabla_1 u)\|^a_{L^{\frac{2a}{2-b}}(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Del lema 3.2, con $u = \nabla_1 u$ y $p = 2$, tenemos que

$$\left(\int_{\Omega_1} (V(\nabla_1 u))^{\frac{2a}{2-b}}\right)^{\frac{2-b}{2}} = \|V(\nabla_1 u)\|^a_{L^{\frac{2a}{2-b}}(\Omega_1)} \leq A\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}},$$

esto si $\frac{2a}{2-b} \leq \frac{2(m-k)}{m-k-2}$, es decir

$$(m-k-2)a + (m-k)b \leq 2(m-k). \tag{3.14}$$

Usando esta condición, a partir de (3.13), tenemos que

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq \frac{B}{\|x_2\|^\gamma} A\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}. \tag{3.15}$$

Integrando (3.15) sobre Ω_2

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} &\leq D\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\right]\\ &= D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right],\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{2}{a}$ tenemos que

$$\begin{aligned}D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\int_{\Omega_2}\left[\|x_2\|^{-\gamma}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right] &\leq D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\left(\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{2}{a}}\right)^{\frac{a}{2}}\\ &= D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla_1 u|^2\right)\right)^{\frac{a}{2}}\\ &= D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla_1 u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\\ &\leq D\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{b}{2}}\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)^{\frac{a}{2}}\\ &= D\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}},\end{aligned}$$

así tenemos

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{a+b} \leq D\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}}. \tag{3.16}$$

Analizando $D\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}}\right)^{\frac{2-a}{2}}$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-2\gamma}{2-a}} &= j\omega_j\int_0^R t^{\frac{-2\gamma}{2-a}}t^{j-1}\,dt\\ &= j\omega_j\int_0^R t^{\frac{-2\gamma}{2-a}+j-1}\,dt\\ &= j\omega_j\left[\frac{1}{\frac{-2\gamma}{2-a}+j}t^{\frac{-2\gamma}{2-a}+j}\,|_0^R\right]\\ &= j\omega_j\frac{1}{\frac{-2\gamma}{2-a}+j}R^{\frac{-2\gamma}{2-a}+j};\end{aligned}$$

con lo que esta integral es finita si y sólo si $\frac{-2\gamma}{2-a}+j>0$, es decir. $\frac{2\gamma}{2-a}<j$, o equivalentemente

$$ja+(j-2)b<2(j+l), \tag{3.17}$$

entonces la expresión (3.16) se reduce a

$$\int_\Omega\|x_2\|^l|u(x)|^{a+b}\le A\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)^{\frac{a+b}{2}}. \tag{3.18}$$

Para concluir, tenemos (3.18) si se satisfacen las condiciones (3.14) y (3.17). Estas condiciones son equivalentes a requerir que $0<a<2$ y $0<b<2$ satisfagan lo siguiente

$$\begin{cases}(m-k-2)a+(m-k)b\le 2(m-k)\\ ja+(j-2)b<2(j+l),\end{cases} \tag{3.19}$$

o equivalentemente, a que a, b cumplan

$$0<a\le\frac{(m-k)(l+2)}{(m-k)+j-2},\ 0<b<\frac{2(m-k)-(m-k-2)a}{m-k},$$

$$\frac{(m-k)(l+2)}{m-k+j-2}\le a<2,\ 0<b<\frac{2(j+l)-ja}{j-2}.$$

Como queremos que $\frac{(m-k)(l+2)}{m-k+j-2}<2$, entonces $l<\frac{2j-4}{m-k}$. Lo que nos queda es elegir la condición adecuada a y b que verifiquen (3.19), tal que $a+b$ se aproxime a $2^*+\tau$. Entonces definimos

$$l^*=\min\left\{l,\frac{2j-4}{m-k}\right\},$$

$$\tau=\frac{2l^*}{m-k+j-2}.$$

Si $m\ge 3$, tomamos $l'\in(0,l^*)$, tal que

$$a=\frac{(m-k)(l'+2)}{m-k+j-2},$$

$$b = \frac{2(j+l') - l'(m-k)}{m-k+j-2},$$

entonces a y b verifican (3.19). Además

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{(m-k)(l'+2)}{m-k+j-2} + \frac{2(j+l') - l'(m-k)}{m-k+j-2} \\ &= \frac{2(m-k)+2j+2l'}{m-k+j-2} \\ &= \frac{2(m-k+j)}{m-k+j-2} + \frac{2l'}{m-k+j-2} \\ &= \frac{2(n-k)}{n-k-2} + \frac{2l'}{n-k-2}. \end{aligned}$$

Si $l' \to l^*$, entonces $a+b \to 2^* + \tau$.

Si $m = 2$, dado que $1 \leq k < m$, entonces $k = 1$. Con esto, tomando la misma $l' \in (0, l^*)$ del caso anterior, tenemos que $\frac{2+l'}{j-1} < 2$. Además, tenemos que

$$a = \frac{l'+2}{j-1},$$

$$b = \frac{2j+l'}{j-1},$$

y

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{l'+2}{j-1} + \frac{2j+l'}{j-1} \\ &= \frac{l'+2+2j+l'}{j-1} \\ &= \frac{2+2j+2l'}{j-1} \\ &= \frac{2j+2}{j-1} + \frac{2l'}{j-1} \\ &= \frac{2(n-k)}{n-k-2} + \frac{2l'}{j-1}. \end{aligned}$$

Si $l' \to l^*$, entonces $a+b \to 2^*_k + \tau$.

Finalmente, para concluir que el encaje es compacto, podemos seguir un procedimiento similar para la demostración del teorema de Rellich - Kondrachov (véase Teorema 1.6). Este mismo argumento también se aplica al teorema 3.2 que veremos a continuación. $\square$

El método utilizado para probar el teorema 3.1 no funciona para casos de baja dimensión. El siguiente resultado están destinados a manejar este caso. Para esto, primero observemos lo siguiente. Sean

$$\tau = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m^2}, \tag{3.20}$$

y

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{2(m+1)(n-k)}{m(m-k+1)} + \frac{2(m+1)}{m(m-k)(m-k+1)} - \frac{2(n-k)}{n-k-2} \\ &= \frac{2(m+1)(m-k+2)}{m(m-k+1)} + \frac{2(m+1)}{m(m-k)(m-k+1)} - \frac{2(m-k+2)}{m-k}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Simplificando ψ obtenemos que

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{2(m+1)(m-k+2)}{m(m-k+1)} + \frac{2(m+1)}{m(m-k)(m-k+1)} - \frac{2(m-k+2)}{m-k} \\ &= \frac{2(m+1)(m-k)(m-k+2) + 2(m+1) - 2m(m-k+1)(m-k+2)}{m(m-k)(m-k+1)} \\ &= \frac{4km^2 + 2m + 2k^2 - 4k + 2}{m(m-k)(m-k+1)}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Afirmamos que $\psi > \tau$. Para mostrar esto, basta con ver que

$$m^2(4km^2 + 2m + 2k^2 - 4k + 2) - 2m(m-k)(m-k+1) > 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}m^2(4km^2 + 2m + 2k^2 - 4k + 2) - 2m(m-k)(m-k+1) &= 4km^4 + 2m^3 + 2k^2m^2 - 4km^2 \\ &\quad - 4km^2 + 2 - 2m(m^2 - km \\ &\quad + m - km + k^2 - k) \\ &= 4km^4 + 2m^3 + 2k^2m^2 - 4km^2 \\ &\quad - 4km^2 + 2 - 2m^3 + 2km^2 \\ &\quad - 2m^2 + 2km^2 - 2mk^2 - 2mk \\ &= 4km^4 + 2k^2m^2 - 2m^2 - 2mk^2 \\ &\quad + 2mk + 2 \\ &= k^2(2m^-2m) + k(4m^4 + 2m) \\ &\quad - (2m^2 - 2) \\ &> 0,\end{aligned}$$

ya que $2m^2 - 2m > 0$, $4m^4 + 2m > 0$ y $k \geq 1$, además $k^2(2m^-2m) + k(4m^4 + 2m) > (2m^2 - 2)$ si y sólo si $m \geq 2$. Con esto, probamos que $\psi < \tau$. Por lo tanto, dado que $2^* < 2_k^*$, podemos concluir que $2^* + \tau < 2_k^* + \psi$. Con base en este argumento, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Supongamos que dim $\Omega_1 = m \geq 2$ y dim $\Omega_2 = j = 2$. Sea G un subgrupo compacto de $\mathcal{O}(m)$. Sea $h = \|x_2\|^l$, con $l > 0$ un número real. Entonces el encaje $H^1_{s,G}(\Omega) \hookrightarrow L^q_h(\Omega)$ es compacto para $q \in (1, 2_k^* + \tau)$, donde*

$$\tau = -\frac{2k(n-k)}{m(m-k)(m-k+1)} + \frac{2(m+1)}{m(m-k+1)} \operatorname{mín}\left\{l, \frac{1}{m-k}\right\}.$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $b > 1$ números reales. Para $u \in H^1_{s,G}(\Omega) \cap C^1_{c,G}(\Omega)$, de los lemas 2.2 y 2.4,

$$
\begin{aligned}
(|u(x)|^b)^\beta &\leq \frac{(bA_k)^\beta}{\|x_2\|^\beta}\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta \\
(|u(x)|^b)^\alpha &\leq C^\alpha (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha, \\
|u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq \frac{C^\alpha (bA_k)^\beta (V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha}{\|x_2\|^\beta}\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta \\
\|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq \frac{E(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha}{\|x_2\|^{\beta-l}}\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta.
\end{aligned}
$$

Integrando sobre Ω_1 tenemos que

$$
\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\int_{\Omega_1}\left[(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta\right].
$$

Como $\beta < 1$, $\frac{1}{\beta} > 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{\beta}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\int_{\Omega_1}\left[(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^\alpha\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta\right] &\leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}\left(\int_{\Omega_1}\left(\left(\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta \\
&= \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}\left(\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta \\
&= \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}\left(\int_{\Omega}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta,
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\int_{\Omega_1}\|x_2\|^l|u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \leq \frac{E}{\|x_2\|^{\beta-l}}\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}\left(\int_{\Omega}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^\beta. \tag{3.23}
$$

Hagamos $\gamma = \beta - l$. Por un lado,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta} &= \left(\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\right)^\alpha \\
&= \|V(|u|^{b-1}\nabla_1 u)\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha}{1-\beta}}(\Omega_1)}.
\end{aligned}
$$

Del lema 3.2, con $u = \nabla_1 u$ y $p = 1$, tenemos que

$$
\left(\int_{\Omega_1}(V(|u|^{b-1}\nabla_1 u))^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)^{1-\beta} = \|V(|u|^{b-1}\nabla_1 u)\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha}{1-\beta}}(\Omega_1)} \leq A\left(\int_{\Omega_1}|u|^{b-1}|\nabla_1 u|\right)^\alpha,
$$

esto si $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq \frac{m-k}{m-k-1}$, es decir

$$
\alpha(m-k-1) + \beta(m-k) \leq m-k. \tag{3.24}
$$

Con esta condición, a partir de (3.23), tenemos que

$$\int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \le \frac{D}{\|x_2\|^\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta . \tag{3.25}$$

Integrando (3.25) sobre Ω_2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\le D \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \right] \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right], \end{aligned}$$

con lo que

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \le D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right].$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned} D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \int_{\Omega_2} \left[\|x_2\|^{-\gamma} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right] &\le D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &\quad \left(\int_{\Omega_2} \left(\left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &\quad \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right) \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &\quad \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla_1 u| \right)^\alpha \\ &\le D \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\beta \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &\quad \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^\alpha \\ &= D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

así tenemos

$$\int_\Omega \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} \le D \left(\int_{\Omega_2} \|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{b-1} |\nabla u| \right)^{\alpha+\beta} . \tag{3.26}$$

Analizando $D\left(\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2}\|x_2\|^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}} &= 2\omega_2\int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}}t\,dt\\
&= 2\omega_2\int_0^R t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+1}\,dt\\
&= 2\omega_2\left[\frac{1}{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2}t^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2}\,|_0^R\right]\\
&= 2\omega_2\frac{1}{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2}R^{\frac{-\gamma}{1-\alpha}+2};
\end{aligned}
$$

y esta integral es finita si y sólo si $\frac{-\gamma}{1-\alpha}+1>1$, es decir. $\frac{\gamma}{1-\alpha}<2$, o equivalentemente

$$2\alpha+\beta<2+l, \tag{3.27}$$

entonces la expresión (3.26) se reduce a

$$\int_{\Omega}\|x_2\|^l|u(x)|^{b(\alpha+\beta)}\leq B\left(\int_{\Omega}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^{\alpha+\beta}. \tag{3.28}$$

Usando la desigualdad de Hölder en (3.28) con $p=2$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\|x_2\|^l|u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq B\left(\int_{\Omega}|u|^{b-1}|\nabla u|\right)^{\alpha+\beta}\\
&\leq B\left(\int_{\Omega}|u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.
\end{aligned}
$$

Si $2(b-1)\leq\frac{2n}{n-2}$, entonces, como $n=m+2$, tenemos que

$$b\leq\frac{2(m+1)}{m}, \tag{3.29}$$

entonces usando el teorema de encaje de Sobolev, tenemos que si $2(b-1)\leq 2^*$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega}|u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{1}{2(b-1)}} &\leq C\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
\left(\int_{\Omega}|u|^{2(b-1)}\right)^{\frac{1}{(b-1)}} &\leq C\int_{\Omega}|\nabla u|^2
\end{aligned}
$$

$$\int_{\Omega}|u|^{2(b-1)}\leq C^{b-1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{b-1}. \tag{3.30}$$

A partir de las desigualdades (3.28), (3.30) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \|x_2\|^l |u(x)|^{b(\alpha+\beta)} &\leq BC^{b-1} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{(b-1)\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= A \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{b(\alpha+\beta)}{2}} .\end{aligned} \tag{3.31}$$

En resumen, tenemos (3.31) si se satisfacen las condiciones (3.24), (3.27) y (3.29). Estas condiciones son equivalentes a requerir que $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ y $b > 1$ satisfagan lo siguiente

$$\begin{cases} \alpha(m-k-1) + \beta(m-k) \leq m-k \\ 2\alpha + \beta < 2 + l \\ b \leq \frac{2(m+1)}{m} \end{cases} \tag{3.32}$$

o equivalentemente, a que α, β cumplan

$$0 < \alpha \leq \frac{(m-k)(1+l)}{m-k+1}, \ 0 < \beta < 1 - \frac{m-k-1}{m-k}\alpha,$$

$$\frac{(m-k)(1+l)}{m-k+1} \leq \alpha < 1, \ 0 < \beta < 2 + l - 2\alpha.$$

Como queremos que $\frac{(m-k)(1+l)}{m-k+1} < 1$, entonces $l < \frac{1}{m-k}$. Lo que nos queda es elegir la condición adecuada tal que α y β verifiquen (3.32). Entonces definimos

$$l^* = \min \left\{ l, \frac{1}{m-k} \right\},$$

$$\tau = -\frac{2k(n-k)}{m(m-k)(m-k+1)} + \frac{2(m+1)}{m(m-k+1)} l^*,$$

y para $\eta > 0$, hagamos

$$\alpha = \frac{(m-k)(1+l^*) - \eta}{m-k+1},$$

$$\beta = \frac{2 - (m-k-1)l^*}{m-k+1},$$

$$b = \frac{2(m+1)}{m},$$

entonces α, β y b verifican (3.32). Además

$$
\begin{aligned}
b(\alpha+\beta) &= \frac{2(m+1)}{m}\left[\frac{(m-k)(1+l^*)-\eta+2-(m-k-1)l^*}{m-k+1}\right] \\
&= \frac{2(m+1)}{m}\left[\frac{m-k+l^*+2-\eta}{m-k+1}\right] \\
&= \frac{2(m+1)}{m}\left[\frac{m-k+2}{m-k+1}+\frac{l^*}{m-k+1}-\frac{\eta}{m-k+1}\right] \\
&= \frac{(m+1)}{m}\left[\frac{2(n-k)}{m-k+1}+\frac{2l^*}{m-k+1}-\frac{2\eta}{m-k+1}\right] \\
&= \frac{2(n-k)}{n-k-2}-\frac{2(n-k)}{n-k-2}+\frac{2(n-k)(m+1)}{m(m-k+1)} \\
&\quad +\frac{2(m+1)}{m(m-k+1)}l^*-\frac{2(m+1)\eta}{m(m-k+1)} \\
&= \frac{2(n-k)}{n-k-2}+2(n-k)\left[\frac{2(m+1)}{m(m-k+1)}-\frac{1}{n-k-2}\right] \\
&\quad +\frac{2(m+1)}{m(m-k+1)}l^*-\frac{2(m+1)\eta}{m(m-k+1)} \\
&= \frac{2(n-k)}{n-k-2}-\frac{2k(n-k)}{m(m-k)(m-k+1)}+\frac{2(m+1)}{m(m-k+1)}l^*-\frac{2(m+1)\eta}{m(m-k+1)} \\
&= 2_k^*+\tau-\frac{2(m+1)\eta}{m(m-k+1)}.
\end{aligned}
$$

Si $\eta \to 0$, $b(\alpha+\beta) \to 2_k^*+\tau$. $\square$

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo permite arribar a las siguientes conclusiones. Nuestro objetivo aquí fue el estudio de encajes de Sobolev, generalizando los resultados de Wang [19] haciendo uso de algunos resultados obtenidos por Hebey y Vaugon [11]. Dicho objetivo se logró a través de este método. En primer lugar, se trató los encajes de Sobolev en un dominio regular acotado con simetría cilíndrica. Este dominio lo tomamos así: sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ en $\mathbb{R}^N$; donde Ω_1 es un conjunto acotado de clase C^1 en $\mathbb{R}^m$, y Ω_2 es una bola de radio R con centro en el origen en $\mathbb{R}^j$. Posterior a esto, involucraremos la acción de los grupos, haciendo actuar un subgrupo compacto G del grupo ortogonal de dimensión m en Ω_1, y en base a esto, se consideró la dimensión de la órbita del grupo G, la cual se denotó por k y se tomó $k \geq 1$. Con esto, definimos el espacio de Sobolev $H^1_{s,G}(\Omega)$, el cual es un subconjunto del espacio H^1_s planteado por Wang. Posterior a esto, Además, involucrando la parte radial en Ω_2, con una función $h(x_2) = \|x_2\|^l$ con $x_2 \in \Omega_2$ y l positivo, tomamos el espacio de Lebesgue con peso h sobre Ω, el cual denotamos por $L^p_h(\Omega)$. Con nuestros resultados de encajes, se mejoraron los resultados de Wang, es decir, se encontró un número positivo $\psi = \psi(h, m, j, k)$ tal que el encaje $H^1_{s,G}(\Omega) \hookrightarrow L^q_h(\Omega)$ es compacto para todo $q \in (1, 2^*_k + \psi)$, y dado que $2^*_k + \psi > 2^* + \tau$, el intervalo del exponente q es de mayor longitud, mejorando los resultados de encaje ya existentes. Con base a lo anterior, se mejoraron los resultados previos, y más aún, creamos un nuevo encaje.

Esta conclusión, a su turno, abre la puerta, principalmente para poder aplicar estos nuevos teoremas de encaje a la resolución de problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales; y también, a seguir mejorando dichos teoremas de encaje.

Bibliografía

[1] Ackermann, N., Cano, A., & Hernández-Martínez, E. (2017). Spectral density estimates with partial symmetries and an application to Bahri–Lions-type results. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 56(1), 1-19.

[2] Adams, R. A., & Fournier, J. J. (2003). Sobolev spaces. Elsevier.

[3] Aubin, T. (2012). Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations (Vol. 252). Springer Science & Business Media.

[4] Brezis, H. (2011). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations (Vol. 2, No. 3, p. 5). New York: Springer.

[5] Cho, Y., & Ozawa, T. (2009). Sobolev inequalities with symmetry. Communications in Contemporary Mathematics, 11(03), 355-365.

[6] Edmunds, D., & Rákosník, J. (2000). Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Mathematica, 3(143), 267-293.

[7] Edmunds, D. E., & Rákosník, J. (2002). Sobolev embeddings with variable exponent, II. Mathematische Nachrichten, 246(1), 53-67.

[8] Faget, Z. (2002). Best constants in Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries. Potential Analysis, 17(2), 105-124.

[9] Fan, X., Zhao, Y., & Zhao, D. (2001). Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss–Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 255(1), 333-348.

[10] Faraci, F., Iannizzotto, A., & Kristály, A. (2011). Low-dimensional compact embeddings of symmetric Sobolev spaces with applications. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 141(2), 383-395.

[11] Hebey, E. (1996). Sobolev spaces in the presence of symmetries. Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds, 90-105.

[12] Hebey E. & Vaugon M. (1997). Sobolev spaces in the presence of symmetries. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 76(10), 859–881.

[13] Ivanov, S., & Nazarov, A. (2007). Weighted Sobolev-type embedding theorems for functions with symmetries. St. Petersburg Mathematical Journal, 18(1), 77-88.

[14] Lions, P. L. (1982). Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev. Journal of Functional Analysis, 49(3), 315-334.

[15] Lions, P. L. (1985). The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1. Revista matemática iberoamericana, 1(1), 145-201.

[16] Musina, R. (2014). Weighted Sobolev spaces of radially symmetric functions. Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-), 193(6), 1629-1659.

[17] Skrzypczak, L. (2003). Heat extensions, optimal atomic decompositions and Sobolev embeddings in presence of symmetries on manifolds. Mathematische Zeitschrift, 243(4), 745-773.

[18] Sobolev, S. L. (1938). Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. Mat. Sb, 46, 471-497.

[19] Wang, W. (2006). Sobolev embeddings involving symmetry. Bulletin des sciences mathematiques, 130(4), 269-278.

[20] Willem, M. (1997). Minimax theorems (Vol. 24). Springer Science & Business Media.